VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Variačné nerovnice a minimalizácie funkcionálov

Variational Inequalities and Minimization of Functionals

2019

Bc. Ferdinand Čapka

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Ferdinand Čapka**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika

Téma: Variační nerovnice a minimalizace funkcionálů.
Variational Inequalities and Minimization of Functionals

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

V diplomové práci se student zaměří na variační nerovnice a jejich vztah s minimy funkcionálů. Součástí práce bude i studium lokálně konvexních prostorů. Práce by měla mít tyto části:

1. Variační nerovnice.
2. Lokálně konvexní prostory.
3. Slabé topologie a uzávěry konvexních množin.
4. Signoriniho úloha a její slabé řešení.

Seznam doporučené odborné literatury:

Dle pokynů vedoucího práce.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2018
Datum odevzdání: 30.04.2019

Jiří Bouchala

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA Fakulta elektrotechniky a informatiky 1D16 OSTRAVA

prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne. Uviedol som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpal.

V Ostrave 26. apríla 2019

....

Súhlasím so zverejnením tejto diplomovej práce podľa požiadaviek čl . 26, odst. 9 Študijného a skúšobného poriadku pre štúdium v magisterských programoch VŠB-TU Ostrava.

V Ostrave 26. apríla 2019 . . . .

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval vedúcemu mojej diplomovej práce prof. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za cenné rady a pripomienky, ktoré mi poskytoval počas odborných konzultácií. A v neposlednom rade by som sa chcel poďakovať mojej rodine a všetkým mojim blízkym za psychickú podporu.

Abstrakt

Práca sa zaoberá problematikou variačných nerovníc, minimalizáciou energetických funkcionálov, pomerne hlbokou abstraktnou teóriou funkcionálnej analýzy, ktorá nám umožní vybudovať netriviálny dôkaz vety, ktorá zaručuje existenciu riešenia variačnej nerovnice. Aplikačný aspekt práce je zameraný na rôzne numerické experimenty. V práci využívam aj algoritmus MPRGP, ktorý bol vyvinutý na katedre aplikovanej matematiky FEI VŠB TUO.

Kľúčové slová: variačná nerovnica, energetický funkcionál, lokálne konvexný priestor, MPRGP, slabá topológia, slabý uzáver.

Abstract

The thesis deals with variational inequalities, minimization of energy functionals, relatively deep abstract theory of functional analysis, which allows us to build non-trivial proof of the theorem, that guarantees the existence of solution of variational inequality. The application aspect of the thesis is focused on various numerical experiments. I also use the MPRGP algorithm, which was developed at the Department of Applied Mathematics, FEI VŠB TUO.

Key Words: variational inequality, energy functional, locally convex space, MPRGP, weak topology, weak closure.

Obsah

Zoznam obrázkov

1 Úvod

Diplomová práca má kompilačný charakter. Cieľom diplomovej práce bolo naštudovať a spracovať problematiku teórie variačných nerovníc, vybudovať potrebný matematický aparát zahŕňajúci funkcionálnu analýzu, a to konkrétne problematiku venovanú lokálne konvexným priestorom a tzv. slabým topológiám, vhodne modifikovať jednotlivé vety, tvrdenia a definície tak, aby bol text čo možno najviac konzistentný.

Tieto nástroje, použité v diplomovej práci, mi poslúžili k tomu, aby bolo možné dokázať existenciu riešenia variačnej nerovnice na konvexnej množine. Znenie kľúčovej vety, ktorá zaručuje existenciu riešenia variačnej nerovnice, je pomerne jednoduché, avšak dôkaz vyžaduje hlbokú znalosť funkcionálnej analýzy.

Fyzikálna interpretácia môže byť chápaná ako priehyb membrány, ktorá je vertikálne tlačená silou zaťaženia f a horizontálne je naťahovaná jednotkovou silou. Variačná nerovnica, ktorá musí byť vyriešená pre všetky prvky, ktoré zvyčajne patria konvexnej množine, zahŕňa väčšinou funkcionál. Matematická teória variačných nerovníc bola pôvodne vyvinutá na riešenie rovnovážnych problémov. Významný matematik John Nash použil zovšeobecnenú variačnú nerovnicu na hľadanie tzv. Nashovho equilibria, kde za svoju dizertačnú prácu dostal Nobelovu cenu. Uplatnenie teórie variačných nerovníc sa od tej doby rozšírilo o problémy z oblasti ekonomiky, financií, optimalizácií a teórie hier.

V prvej časti diplomovej práce oboznamujem čitateľa so základnými, až pokročilejšími elementami funkcionálnej analýzy, ktoré budeme ďalej v texte využívať.

V ďalšej časti, venovanej úvodu ku optimalizáciám funkcionálov na normovaných lineárnych priestoroch, sa venujem hľadaniu miním funkcionálov, ktoré neskôr zovšeobecním na funkcionály, ktoré sú definované na abstraktných, nekonečnodimenzionálnych priestoroch.

Vo vlastných vybudovaných dôkazoch existencie miním poukazujem na nadväznosť a analógiu pri zovšeobecnovaní požiadavok, ktoré sú kladené na funkcionál, a to spojitosť funkcionálu, zhora a zdola polospojitosť funkcionálu a slabá zhora a zdola polospojitosť funkcionálu.

V ďalšej kapitole sa venujem existencii a jednoznačnosti tzv. Signoriniho úlohy, poukazujem na klasickú Lax-Milgrammovu vetu a jej prirodzené zovšeobecnenie pre prípad variačnej nerovnice. Poukazujem na to, že za určitých podmienok je riešenie variačnej nerovnice ekvivalentné minimalizácii tzv. energetického funkcionálu.

Praktická a numerická časť diplomovej práce spočíva na jednej strane vo vyriešení Signoriniho úlohy metódou optimalizácie, a to konkrétne metódou tzv. kvadratického programovania s podmienkou ohraničenia na nerovnosť, tzv. Karush-Kuhn-Tuckerovou podmienkou a na strane druhej vyriešením algoritmom MPRGP (Modified proportioning with reduced gradient projections), ktorý bol vyvinutý na katedre aplikovanej matematiky Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB TUO. Tento algoritmus má lepšie asymptotické a numerické vlastnosti ako metóda kvadratického programovania. Na katedre aplikovanej matematiky boli riešené veľké sústavy rovníc, ktoré odzrkadľovali reálne problémy v rádoch biliónov v prostredí HPC. Ďalej som sa v práci

venoval tzv. semikoercívnemu prípadu priehybu membrány a analýze existencie a jednoznačnosti riešenia. V práci som vymyslel dva názorné príklady semikoercívneho prípadu priehybu jednej membrány, ktorých riešenia som taktiež implementoval. V semikoercívnom prípade nemáme jednoznačne zaručenú existenciu a jednoznačnosť riešenia. V práci ukážem, že aby bola zaručená, musí byť sila zaťaženia f vhodne rozložená na membránu. Ďalej som v diplomovej práci zovšeobecnil kontaktný problém v prípade dvoch membrán, a taktiež uviedol semikoercívny prípad.
V poslednej kapitole sa venujem lokálne konvexným topologickým vektorovým priestorom a teórii slabých topológií, kde dokazujem kľúčovú vetu vo forme ekvivalencie.

2 Motivácia

Pre jednoduchosť uvažujme najskôr reálnu funkciu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n premenných. Uvažujme jej smerovú deriváciu v bode $u \in \mathbb{R}^n$ a v smere $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial h} = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t},$$

ak táto limita existuje. Ak funkcia f nadobúda svojho minima v bode $u^* = \arg_{u \in \mathbb{R}^n} \min f(u) \in \mathbb{R}^n$ a jej smerová derivácia $\frac{\partial f(u^*)}{\partial h}$ existuje $\forall h \in \mathbb{R}^n$, potom zrejme $\forall h \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f(u^*)}{\partial h} = 0$.

Pokiaľ funkcia f nadobúda minimum v bode na konvexnej[1] uzavretej množine $K \subset \mathbb{R}^n$, t.j.

$$\exists u^* \in K : \; f(u^*) = \min_{v \in K} f(v),$$

kde f je diferencovateľná v bode u^*, platí nasledujúca nerovnosť :

$$\forall v \in K : \frac{\partial f(u^*)}{\partial h} \geq 0, \text{ kde } h = v - u^*.$$

T.j, v smere z bodu u^* do ľubovoľného bodu $v \in K$ je funkcia f neklesajúca.

Uvedomme si, že konvexnosť množiny je podstatná, pretože nekonvexná množina nemusí obsahovať úsečku spojujúcu body u^* a v a funkcia môže aj v tomto smere v okolí bodu u^* klesať.

Použime iný zápis pre deriváciu funkcie f v smere $h = v - u$:

$$\partial f(u, v - u) := \frac{\partial f(u)}{\partial h}.$$

Potom úloha nájdenia bodu $u^* \in K$, ktorý splňuje:

$$\forall v \in K : \partial f(u^*, v - u^*) \geq 0, \text{ kde } h = v - u^*.$$

je formou tzv. **variačnej nerovnice**. Ukážeme, že má zmysel uvažovať rovnakú úlohu aj pre prípad *funkcionálov* na všeobecnejších štruktúrach, ako sú napr. *nekonečnodimenzionálne* priestory. Ukážeme, že pre variačnú nerovnicu vhodnou voľbou priestoru, konvexnej množiny K a funkcionálu, môžeme formulovať rôzne typy okrajových podmienok, či už s voľnou alebo pevnou hranicou. Taktiež ukážeme súvislosti medzi riešením variačnej nerovnice a bodom u^*, v ktorom funkcionál nadobúda svojho minima.

V tejto kapitole bolo čerpané z [7].

[1] Množina M je **konvexná**, ak $\forall x_1, x_2 \in M, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : \; \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in M$.

3 Vlastnosti bilineárnych foriem

Dôležitú úlohu pri skúmaní existencie a jednoznačnosti variačných rovníc, resp. nerovníc zohráva *bilineárna forma.* Ukážeme, že splnenie určitých vlastností, ktoré budeme klásť na bilineárnu formu, nám zaručí existenciu a jednoznačnosť riešenia. Ukážeme, že v prípade *symetrickej* bilineárnej formy dostaneme ekvivalenciu riešenia variačnej nerovnice s minimalizáciou *energetického funkcionálu.*

Nech V je vektorový priestor, pripomeňme, že bilineárna forma $a(\cdot,\cdot) : V\times V \to \mathbb{R}$ sa nazýva:

- symetrická, pokiaľ $\forall u, v \in V: \; a(u,v) = a(v,u)$,
- antisymetrická, pokiaľ $\forall u, v \in V: \; a(u,v) = -a(v,u)$,

a že každú bilineárnu formu je možné rozložiť na jej **symetrickú** a **antisymetrickú** zložku:

$$\begin{aligned} a(u,v) &= a_S(u,v) + a_A(u,v), \text{ kde:} \\ a_S(u,v) &= \frac{1}{2}(a(u,v) + a(v,u)) \text{ a } \; a_A(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) - a(v,u)). \end{aligned}$$

Definícia. 3.1 *Nech $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ je bilineárna forma, potom funkcia $f : V \to \mathbb{R}$ definovaná:*

$$\forall h \in V : f(h) := a(h,h),$$

*sa nazýva **kvadratická** forma na V príslušná danej bilineárnej forme.*

Pozorovanie. 3.2 *Skalárny súčin na vektorovom priestore V, je pozitívne definitná, symetrická bilineárna forma.*

4 Elementy funkcionálnej analýzy

Pod zkratkou NLP rozumieme normovaný lineárny priestor.

Definícia. 4.1 *Povieme, že normy* $||.||_1$ *a* $||.||_2$ *na vektorovom priestore* X *sú ekvivalentné, ak existujú konštanty* $k, K \in \mathbb{R}^+$ *také, že:*

$$\forall x \in X: \ k||x||_1 \leq ||x||_2 \leq K||x||_1.$$

Definícia. 4.2 *Nech* (x_n) *je postupnosť v NLP* X *a* $x \in X$*. Povieme, že postupnosť* (x_n) ***konverguje*** *ku bodu* x*, a označujeme* $x_n \to x$*, ak* $||x_n - x|| \to 0$ *pre* $n \to \infty$*.*

Nech X a Y sú NLP. Symbolom $\mathscr{L}(X,Y)$ budeme označovať množinu všetkých lineárnych zobrazení z X do Y, ktoré sú spojité na X.

Pripomeňme, že $\mathscr{L}(X,Y)$ spolu s normou definovanou:

$$||A|| := \sup_{x \in X, ||x||_X \leq 1} ||A(x)||, \ A \in \mathscr{L}(X,Y)$$

je NLP.

Definícia. 4.3 *Nech* X *je NLP, symbolom* $X^* := \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ *budeme označovať priestor všetkých spojitých a lineárnych funkcionálov na* X*, a nazývame ho* ***duálny priestor*** *ku priestoru* X*.*

$\mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ spolu s normou:

$$||A|| := \sup_{x \in \ X, ||x||_X \leq 1} |A(X)|, \ A \in \mathscr{L}(X, \mathbb{R})$$

je NLP.

Definícia. 4.4 *Nech* X *je NLP, symbolom* $X^{\#}$ *budeme označovať priestor všetkých lineárnych funkcionálov na* X*, a nazveme ho* ***algebraický duál*** *ku priestoru* X*.*

Veta. 4.5 *Nech* X *a* Y *sú NLP. Pre* $L \in \mathscr{L}(X,Y)$ *a* $x \in X$*, platí odhad:*

$$||Lx||_Y \leq ||L|| \ ||x||_X.$$

Poznámka. 4.6 *Nech* X *je NLP, potom zrejme* $X^* \subset\subset {}^2 X^{\#}$*.*

Nech X je normovaný lineárny priestor. Označme symbolom $X^{**} = (X^*)^*$ duálny priestor ku priestoru X^*, tzv. **druhý duál**. Druhý duál ku X je teda priestorom všetkých spojitých a lineárnych funkcionálov na X^*. Pre $x \in X$ definujme zobrazenie $\varepsilon_x : X^* \to \mathbb{R}$ predpisom:

[2] Podpriestor

$$\varepsilon_x(\varphi) := \varphi(x)$$

Kanonickým vnorením X do X^{**} rozumieme zobrazenie $\varepsilon : X \to X^{**}$ definované predpisom:

$$\varepsilon(x) := \varepsilon_x.$$

Pretože $(\forall x \in X)(\forall \varphi \in X^*) : |\varepsilon_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi||.||x||$, je $\varepsilon_x \in X^{**}$.

Poznámka. 4.7 *Dá sa ukázať, že kanonické vnorenie ε je* ***izometrický izomorfizmus***[3] *X na $\varepsilon(X) \subset X^{**}$.*

Definícia. 4.8 *Povieme, že NLP X je* ***reflexívny****, ak $\varepsilon(X) = X^{**}$, kde ε je kanonické vnorenie X na X^{**}.*

Zavedenie duálneho priestoru X^* nám umožňuje zaviesť ďalší typ konvergencie, tzv. **slabú konvergenciu**.

Definícia. 4.9 *Nech (x_n) je postupnosť v NLP X, $x \in X$. Povieme, že postupnosť (x_n)* ***konverguje slabo*** *ku bodu $x \in X$, zapisujeme $x_n \rightharpoonup x$, ak platí:*

$$\forall f \in X^* : f(x_n) \to f(x).$$

Poznámka. 4.10 *Nech X je NLP, potom v X platí, že každá postupnosť má nanajvýš jednu slabú limitu. Ak $x_n \to x$, potom $x_n \rightharpoonup x$, a ak $x_n \rightharpoonup x$, potom $(\exists k \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}) : ||x_n|| \leq k$.*

Definícia. 4.11 *Ak je (L_n) postupnosť funkcionálov v X^*, povieme, že (L_n)* ***konverguje slabo**** *ku $L \in X^*$, zapisujeme $L_n \overset{*}{\rightharpoonup} L$, ak platí:*

$$\forall x \in X : L_n x \to Lx.$$

Definícia. 4.12 *Nech X je NLP, povieme, že množina $K \subset X$ je* ***uzavretá****, ak platí:*

$$(\forall x \in X)(\forall (x_n) \subset K) : \Big[x_n \to x \Rightarrow x \in K\Big].$$

Definícia. 4.13 *Nech X je NLP, povieme, že množina $K \subset X$ je* ***slabo uzavretá****, ak platí:*

$$(\forall x \in X)(\forall (x_n) \subset K) : \Big[x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in K\Big].$$

Veta. 4.14 *Nech K je konvexná podmnožina NLP X. Potom K je uzavretá práve vtedy, keď K je slabo uzavretá.*

[3] [1]

Dôkaz viď 7.4 ■

Definícia. 4.15 *Nech X je NLP. Povieme, že množina $K \subset X$ je* ***kompaktná****, ak z každej postupnosti (x_n) množiny K je možné vybrať podpostupnosť majúcu limitu v K.*

Veta. 4.16 *Nech X je NLP. Ak je množina $K \subset X$ kompaktná, je uzavretá a ohraničená.*

Definícia. 4.17 *Nech X je NLP. Povieme, že množina $K \subset X$ je* ***slabo kompaktná****, ak z každej postupnosti (x_n) množiny K je možné vybrať podpostupnosť majúcu* ***slabú limitu*** *v K.*

Definícia. 4.18 *Nech X je reflexívny NLP. Nech $K \subseteq X$, a nech funkcionál $J : X \to \mathbb{R}$. Potom funkcionál J nazveme* ***koercívny*** *na množine K, ak:*

$$\lim_{v \in K, ||v|| \to \infty} J(v) = \infty.$$

Veta. 4.19 (Cauchy-Schwartzova nerovnosť) *Nech X je priestor so skalárnym súčinom. Potom pre všetky $x, y \in X$ platí:*

$$|(x, y)| \leq ||x||.||y||.$$

Dôkaz viď [3] ■

Veta. 4.20 (Eberlein-Šmulianova) *Nech X je Banachov[4] priestor. Potom X je reflexívny práve vtedy, ak z každej ohraničenej postupnosti v X je možné vybrať slabo konvergentnú podpostupnosť.*

Veta. 4.21 (Geometrická Hahn-Banachova veta) *Nech K, L sú neprázdne disjunktné konvexné podmnožiny NLP X. Ak K, L sú obe otvorené, alebo jedna z nich je uzavretá a druhá kompaktná, potom:*

$$\exists f \in X^*,\ \alpha \in \mathbb{R} :\ K \subset \{x \in X : f(x) > \alpha\}\ \wedge\ L \subset \{x \in X : f(x) < \alpha\}.$$

Dôkaz viď [1] ■

4.1 Konvexnosť funkcionálov

Definícia. 4.22 *Nech V je vektorový priestor, $K \subset V$ je konvexná množina. Funkcionál $F : K \to \mathbb{R}$ nazývame* ***konvexný resp. rýdzo konvexný na*** *K, ak:*

$$(\forall t \in (0, 1)), (\forall u, v \in K) :\ F(tu + (1 - t)v) \leq tF(u) + (1 - t)F(v),$$

[4] t.j. úplný NLP

resp.

$$(\forall t \in (0,1))(\forall u, v \in K): \ F(tu + (1-t)v) < tF(u) + (1-t)F(v).$$

V tejto kapitole bolo čerpané z [1], [3].

5 Úvod ku optimalizáciám funkcionálov

5.1 Rôzne varianty spojitosti

Nech X predstavuje normovaný lineárny priestor.

5.1.1 Spojitosť

Definícia. 5.1 *Povieme, že funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitý v bode $x_0 \in X$, ak:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Povieme, že funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitý na množine $K \subset X$, ak platí implikácia:

$$(\forall x_0 \in K)(\forall (x_n) \subset K) : \Big[x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)\Big].$$

Uveďme pomocnú vetu, ktorá nám poslúži pri dôkaze Weierstrassovej vety:

Veta. 5.2 *Nech funkcia $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktnej množine $K \subset X$. Potom množina $f(K) \subset \mathbb{R}$ je tiež kompaktná.*

Dôkaz

V prípade, že $K = \emptyset$, je aj $f(K) = \emptyset$ a tvrdenie platí triviálne.

Predpokladajme teda, že $K \neq \emptyset$. Zvoľme postupnosť $(c_m) \subset f(K) \subset \mathbb{R}$ ľubovoľne. Potom ku každému číslu c_m existuje bod $x_m \in K$ tak, že $f(x_m) = c_m$. Pretože K je kompaktná, je možné z postupnosti $(x_m) \subset K$ vybrať podpostupnosť (x_{m_k}) majúcu limitu $x \in K$. Zo spojitosti funkcie f na K plynie, že $\lim_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = f(x) \in f(K)$. Teda z postupnosti (c_m) je možné vybrať podpostupnosť $(c_{m_k}) = (f(x_{m_k}))$ majúcu limitu $f(x) \in f(K)$. Dokázali sme, že $f(K)$ je kompaktná.

■

Tvrdenie. 5.3 *Nech $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}$ je kompaktná, potom existujú* $\min K, \max K$.

Dôkaz Keďže je K kompaktná, je ohraničená, teda $\sup K \in \mathbb{R}$ resp. $\inf K \in \mathbb{R}$. Z definície supréma resp. infima plynie, že:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n, y_n \in K) : \Big[\sup K - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup K\Big] \text{ resp. } \Big[\inf K + \frac{1}{n} > y_n \geq \inf K\Big],$$

a teda je zrejmé, že:

$$\sup K = \lim_{n \to \infty} x_n \text{ , resp. } \inf K = \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Z uzavretosti množiny K plynie, že $\sup K \in K$ resp. $\inf K \in K$, a teda $\inf K = \min K$, $\sup K = \max K$. ∎

Veta. 5.4 (Weierstrassova) *Nech $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktnej množine $\emptyset \neq K \subset X$. Potom f nadobúda na K svojho maxima a minima.*

Dôkaz Z predchádzajúcich viet plynie, že množina $f(K)$ je kompaktná v $\mathbb{R}$ a obsahuje svoje suprémum resp. infímum, čo znamená, že existujú body $x, y \in K$ s vlastnosťou:

$$f(x) = \max f(K) = \sup f(K); \quad f(y) = \min f(K) = \inf f(K),$$

t.j. f nadobúda na K svojho maxima a minima. ∎

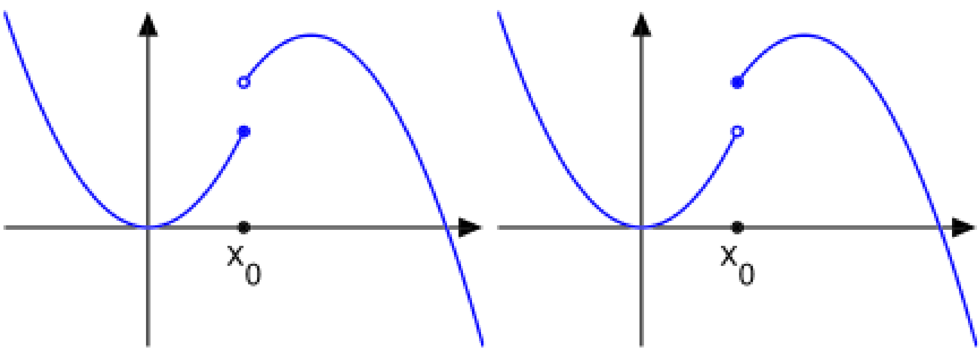
5.1.2 Polospojitosť

Definícia. 5.5 *Povieme, že funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ je zhora polospojitý na množine $K \subset X$, ak platí implikácia:*

$$(\forall x_0 \in K)(\forall (x_n) \subset K) : \Big[x_n \to \ x_0 \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(x_0)\Big].$$

Definícia. 5.6 *Povieme, že funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ je zdola polospojitý na množine $K \subset X$, ak platí implikácia:*

$$(\forall x_0 \in K)(\forall (x_n) \subset K) : \Big[x_n \to \ x_0 \Rightarrow \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x_0)\Big].$$



Obr. 1: Zdola a zhora polospojitá funkcia na $\mathbb{R}$.

Veta. 5.7 (Zovšeobecnená Weierstrassova) *Nech $\emptyset \neq K \subset X$ je kompaktná množina. Nech funkcionál $f : K \to \mathbb{R}$ je zdola polospojitý na K, potom existuje minimum f na K.*

Dôkaz Z toho, že $K \neq \emptyset$ plynie, že aj $f(K) \neq \emptyset$ a $i := \inf_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(a) Nech $i = -\infty$. Nech $(x_n) \subset K$ je postupnosť bodov množiny K, pre ktorú platí, že $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(x_n) < -n$, a teda $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$. Z toho, že množina K je kompaktná plynie, že existuje vybratá podpostupnosť (x_{n_k}) z postupnosti (x_n) a bod $x_0 \in K : x_{n_k} \to x_0$. Potom dostávame:

$$f(x_0) \overset{(1)}{\leq} \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty.$$

Nerovnosť (1) plynie z polospojitosti funkcionálu f zdola na množine K, rovnosť (2) z toho, že postupnosť $f(x_{n_k})$ je vybratá z postupnosti $f(x_n)$.

Takže $f(x_0) = -\infty$, čo je spor, pretože $f : K \to \mathbb{R}$.

(b) Nech $i \in \mathbb{R}$. Nech $(x_n) \subset K$ je postupnosť bodov množiny K, pre ktorú platí, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = i$, taká samozrejme existuje z definície infima. Z toho, že K je kompaktná plynie, že existuje vybratá podpostupnosť (x_{n_k}) z postupnosti (x_n) a bod $x_0 \in K : (x_{n_k}) \to x_0$. Potom podobne ako v prípade (a) dostávame:

$$i = \inf_{x \in K} f(x) \overset{(1)}{\leq} f(x_0) \overset{(2)}{\leq} \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = i$$

Nerovnosť (1) v uvedenom vzťahu plynie z definície infima, nerovnosť (2) z polospojitosti funkcionálu f zdola na množine K, rovnosť (3) z toho, že postupnosť $f(x_{n_k})$ je vybratá z postupnosti $f(x_n)$.

Takže $f(x_0) = i \in \mathbb{R}$, a keďže $x_0 \in K$ je zároveň dokázané, že funkcionál f nadobúda v bode x_0 minimum na K rovné i:

$$f(x_0) = i = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x).$$

∎

Obdobne sa ukáže existencia maxima v prípade, keď uvažujeme zhora polospojitý funkcionál na K.

5.1.3 Slabá polospojitosť

Definícia. 5.8 *Povieme, že funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ je slabo zhora polospojitý na množine $K \subset X$, ak platí implikácia:*

$$(\forall x_0 \in K)(\forall (x_n) \subset K) : \Big[x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x_0)\Big].$$

Definícia. 5.9 *Povieme, že funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ je slabo zdola polospojitý na množine $K \subset X$, ak platí implikácia:*

$$(\forall x_0 \in K)(\forall (x_n) \subset K) : \Big[x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0).\Big]$$

Veta. 5.10 *Nech X je NLP, potom každá konvexná a uzavretá množina $\emptyset \neq K \subset X$ je slabo uzavretá.*

Dôkaz

Dôkaz povedieme sporom. Chceme dokázať, že $(\forall x \in X)(\forall (x_n) \subset K): \; [x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in K]$.

Nech $(x_n) \subset K$, $x_n \rightharpoonup x$ a $x \notin K$. Potom podľa geometrickej Hahn-Banachovej vety 4.21 (množina K je konvexná a uzavretá, množina $\{x\}$ je konvexná a kompaktná a $K \cap \{x\} = \emptyset$).

$$\exists f \in X^*, \; \alpha \in \mathbb{R}: \; f(x) < \alpha \; \wedge \; \forall y \in K: \; f(y) > \alpha.$$

Z toho plynie, že:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; f(x_n) > \alpha$$

.

Limitným prechodom dostávame:

$$f(x) \overset{(1)}{=} \lim_{n \to \infty} f(x_n) \geq \alpha,$$

čo je spor.

Rovnosť (1) plynie z toho, že $x_n \rightharpoonup x$.

■

Veta. 5.11 *Nech X je reflexívny NLP* [5]*, nech $\emptyset \neq K \subset X$ je konvexná, uzavretá a ohraničená množina, nech funkcionál $f: X \to \mathbb{R}$ je slabo zdola polospojitý na K. Potom existuje $\min_{x \in K} f(x)$.*

Dôkaz

Z toho, že $K \neq \emptyset$ plynie, že aj $f(K) \neq \emptyset$ a $i := \inf_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(a) Nech $i = -\infty$. Nech $(x_n) \subset K$ je postupnosť bodov množiny K, pre ktorú platí, že $f(x_n) \to -\infty$. Kedže množina K je ohraničená, je aj postupnosť (x_n) je ohraničená, a keďže X je reflexívny, potom podľa Eberlein-Šmulianovej vety je možné z postupnosti (x_n) vybrať slabo konvergentnú podpostupnosť $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$. Množina K je konvexná a uzavretá, a teda podľa vety 5.10 je slabo uzavretá, teda $x_0 \in K$, potom:

$$f(x_0) \overset{(1)}{\leq} \liminf_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \overset{(2)}{=} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty.$$

Nerovnosť (1) plynie zo slabej zdola polospojitosti funkcionálu f na množine K, rovnosť (2) z toho, že postupnosť $f(x_{n_k})$ je vybratá z postupnosti $f(x_n)$. Teda $f(x_0) = -\infty$, čo je spor s predpokladom, teda $f: X \to \mathbb{R}$.

[5] t.j. Banachov

(b) Nech $i \in \mathbb{R}$. Nech $(x_n) \subset K$ je postupnosť bodov množiny K, pre ktorú platí, že $f(x_n) \to i$. Podobne ako v prípade (a), existuje vybratá podpostupnosť (x_{n_k}) postupnosti (x_n) a bod $x_0 \in K : x_{n_k} \rightharpoonup x_0$. Dostávame:

$$i = \inf_{x \in K} f(x) \overset{(1)}{\leq} f(x_0) \overset{(2)}{\leq} \liminf_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \overset{(3)}{=} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = i.$$

Nerovnosť (1) v uvedenom vzťahu plynie z definície infima, nerovnosť (2) zo slabej zdola polospojitosti funkcionálu f na množine K , rovnosť (3) z toho, že postupnosť $f(x_{n_k})$ je vybratá z postupnosti $f(x_n)$.

Tým sme ukázali existenciu $\min_{x \in K} f(x) = i$.

∎

Veta. 5.12 *Nech priestor X je reflexívny. Nech množina $\emptyset \neq K \subset X$ je uzavretá a konvexná. Nech $f : K \to \mathbb{R}$ je slabo zdola polospojitý funkcionál, ktorý je koercívny na K. Potom funkcionál J nadobúda minima na K.*

Dôkaz

Množina K je neprázdna, teda $\exists \inf_{v \in K} := i < \infty$. Nech $(u_n) \subset K$ je postupnosť, pre ktorú platí, že $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = i = \inf_{v \in K} f(v)$. Keďže funkcionál f je koercívny a $i < \infty$ platí, že postupnosť $||u_n||$ je vďaka koercivite funkcionálu ohraničená, pretože ak by ohraničená nebola, dala by sa vybrať podpostupnosť, taká že $||u_{n_k}|| \to \infty$. Priestor X je reflexívny, preto na základe Eberlein-Šmulianovej vety plynie, že existuje vybratá podpostupnosť (u_{n_k}) a bod $u \in H : \ u_{n_k} \rightharpoonup u$. Množina K je konvexná a uzavretá, teda je podľa vety 5.10 slabo uzavretá, teda $u \in K$. f je slabo zdola polospojitý funkcionál, teda dostávame:

$$f(u) \leq \lim_{k \to \infty} \inf f(u_{n_k}) = \lim_{n \to \infty} f(u_n) = \inf_{v \in K} f(v) = i,$$

teda:

$$f(u) = \inf_{v \in K} f(v) = \min_{v \in K} f(v)$$

∎

Veta. 5.13 *Nech X je reflexívny (Banachov priestor). Nech $\emptyset \neq K \subset X$ je uzavretá a konvexná množina. Nech funkcionál $f : K \to \mathbb{R}$ je spojitý na K a konvexný na K, potom je funkcionál f slabo zdola polospojitý na množine K.*

Dôkaz

Najskôr ukážeme ekvivalenciu:

$$f \text{ je slabo zdola polospojitý } \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} : M_a := \{u \in K : J(u) \leq a\} \text{ slabo uzavretá }.$$

(i) Nech je funkcionál f slabo zdola polospojitý na K. Nech postupnosť $(x_n) \subset M_a \subseteq K$, potom zo slabej zdola polospojitosti a z toho, ako je definovaná množina M_a a z Eberlein-Šmulianovej vety po prípadnom výbere dostávame :

$$x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq a.$$

Množina K je podľa vety 5.10 slabo uzavretá, a teda $x_0 \in K$, teda $x_0 \in M_a$, teda množina M_a je slabo uzavretá.

(ii) Sporom, nech $\forall a \in \mathbb{R}$ je M_a slabo uzavretá a f nie je slabo zdola polospojitý na K. Teda:

$$\exists (x_n) \in K : \; x_n \rightharpoonup x_0 \in K : f(x_0) > \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Zvoľme $a \in \mathbb{R} : \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq a < f(x_0)$, potom po prípadnom výbere platí, že $(x_n) \in M_a$.

Keďže $(x_n) \rightharpoonup x_0$ a M_a je slabo uzavretá, je $x_0 \in M_a$, čo znamená, že $f(x_0) \leq a$ čo je spor.

$\forall a \in \mathbb{R}$ je množina M_a uzavretá a konvexná. (Plynie zo spojitosti funkcionálu f na K, z konvexity f, a z konvexity množiny K). Potom podľa vety 5.10 je množina M_a slabo uzavretá $\forall a \in \mathbb{R}$. Z toho plynie, že funkcionál f je slabo zdola polospojitý na K.

■

Veta. 5.14 *Norma $||.||$ je slabo zdola polospojitý funkcionál, t.j.*

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow ||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||.$$

Dôkaz

V prípade, že $x = 0$, tvrdenie platí triviálne. Predpokladajme teda, že $x \neq 0$. Potom podľa Hahn – Banachovej vety[6] a jej dôsledku, existuje $f \in X^* : ||f|| = 1$, a že $f(x) = ||x||$. Z predpokladu vety plynie:

$$||x|| = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \big[||f||.||x_n||\big] = \liminf_{n\to\infty} ||x_n||,$$

[6] viď[3]

kde sme využili dôsledok Hahn-Banachovej vety, jednoznačnosť limity, odhad 4.5.

■

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2], [5], [6].

5.2 Sobolevove priestory

Nech $\Omega \subset X$ je oblasť s lipschitzovskou hranicou, hranicu množiny Ω budeme označovať Γ.

Označme ďalej:

- priestor $C^{(k)}(\overline{\Omega}), k \in \mathbb{N}$, množina všetkých spojito diferencovateľných funkcií až do rádu k vrátane, definovaných na $\overline{\Omega}$,
- priestor $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, množina všetkých spojito nekonečnekrát diferencovateľných funkcií definovaných na $\overline{\Omega}$,
- priestor $C_0^{(k)}(\overline{\Omega}), k \in \mathbb{N}$, množina všetkých spojito diferencovateľných funkcií až do rádu k vrátane s kompaktným nosičom, definovaných na $\overline{\Omega}$,
- priestor $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$, množina všetkých spojito nekonečnekrát diferencovateľných funkcií s kompaktným nosičom definovaných na $\overline{\Omega}$.

Pre $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ zaveďme na priestore $C^{(\infty)}(\overline{\Omega})$ skalárny súčin:

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx, \ \forall u, v \in C^{(\infty)}(\overline{\Omega}),$$

kde α je **multiindex** t.j. $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \ \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ D^{\alpha} u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, kde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Môžeme zaviesť normu, ktorá je indukovaná príslušným skalárnym súčinom bežným spôsobom:

$$||u||_{H^k(\Omega)} := \sqrt{(u, u)_{H^k(\Omega)}}.$$

Túto normu zvykneme značiť aj $||u||_{1,2} := ||u||_{H^k(\Omega)}$.

Definícia. 5.15 *Sobolevov priestor $H^k(\Omega)$ definujeme ako zúplnenie*[7] *priestoru :*

$$(C^{\infty}(\overline{\Omega}), ||.||_{H^k(\Omega)}).$$

Definícia. 5.16 *Sobolevov priestor $H_0^k(\Omega)$ definujeme ako uzáver množiny $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$ v priestore $H^k(\Omega)$, tj.*

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{||.||_{H^k(\Omega)}} = \{u \in H^k(\Omega) : \exists (u_n) \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega}) : \ u_n \to u\}$$

[7] viď[3]

.

Poznamenajme, že priestorom $L^p(\Omega)$ budeme označovať množinu všetkých lebesgueovsky integrovateľných funkcií $u(x)$, pre ktoré je integrál $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$.

Veta. 5.17 (o stopách) *Nech Ω je oblasť s lipschitzovskou[8] hranicou Γ. Potom existuje práve jeden spojitý lineárny operátor $T : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ taký, že pre všetky $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ platí :*

$$Tv = v|_\Gamma.$$

*Prvok $Tv \in L^2(\Gamma)$ nazývame **stopou funkcie** $v \in H^1(\Omega)$.*

Veta. 5.18 (Hölderova a Minkowskeho nerovnosť) *Nech $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sú tzv. združené koeficienty. Potom platí pre každé $i \in \{1, \cdots, n\}$*

(H) Ak $u(x) \in L^p(\Omega)$ a $v(x) \in L^q(\Omega)$, je $u(x)v(x) \in L^1(\Omega)$ a platí:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |v(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}.$$

(M) Ak $u(x), v(x) \in L^p(\Omega)$, je $u(x) + v(x) \in L^p(\Omega)$ a platí:

$$(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_\Omega |u(x)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_\Omega |v(x)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Veta. 5.19 (Friedrichsova) [9] *Funkcionál $||\cdot||_{k,2,0}$ definovaný predpisom:*

$$||u||_{k,2,0} := \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2}$$

je na priestore $H_0^1(\Omega)$ normou ekvivalentnou s normou $||u||_{1,2}$.

Veta. 5.20 (Greenova) *Nech $\Omega \subset X$ je oblasť s lipschitzovskou hranicou, nech $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ a $v(x) = v(x_1, \ldots, x_n)$ patria do priestoru $C^{(1)}(\overline{\Omega})$,*

potom pre každé $i \in \{1, \cdots, n\}$ platí:

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx = \int_\Gamma u(x)v(x)n_i dS - \int_\Omega u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx,$$

kde n_i je i-ta zložka vektora vonkajšej normály.

[8] viď[3]

[9] Táto veta platí všeobecnejšie, viď[3]., avšak pre účely tejto práce vystačíme s touto formuláciou

Dôsledok. 5.21 *Nech $\Omega \subset X$ je oblasť s lipschitzovskou hranicou, nech $u(x), v(x)$ patria do priestoru $C^{(1)}(\overline{\Omega})$. Potom platí:*

$$\int_{\Omega} \triangle u(x) v(x) dx = \int_{\Gamma} v(x) \frac{du(x)}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \bigtriangledown u(x) \bigtriangledown v(x) dx,$$

kde symbolom $\frac{du(x)}{\partial n}$ rozumieme deriváciu v smere vonkajšej normály.

Pre úplnosť pripomeňme, že pod pojmom **variačná rovnica** rozumieme úlohu nájsť $u \in V := H_0^1(\Omega)$ tak, aby bola splnená variačná identita:

$$\forall v \in V: \ a(u, v) = F(v),$$

kde $a(u, v)$ je bilineárna forma na $V \times V$ a $F(v)$ je funkcionál na V.

A taktiež pripomeňme, že pod pojmom **slabá formulácia** variačnej rovnice rozumieme úlohu nájsť $u \in V := H_0^1(\Omega)$ tak, aby:

$$\forall v \in V: \ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Príklad. 5.22 *Riešme nasledujúcu okrajovú úlohu využitím minimalizácie energetického funkcionálu.*

$$\begin{cases} -\triangle u = f \quad v \quad \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ u = 0 \quad na \quad \Gamma_u, \\ \frac{du}{dn} = 0 \quad na \quad \Gamma_f, \\ u = g \quad na \quad \Gamma_c, \end{cases}$$

kde:

$$\Gamma_u := \{(0, y); \ y \in (0, 1)\},$$

$$\Gamma_c := \{(1, y); \ y \in (0, 1)\},$$

$$\Gamma_f := \Gamma \setminus (\Gamma_u \cup \Gamma_c),$$

$$f(x, y) = 12xy^2 - 2x,$$

$$g(1, y) = (1 - y)^2 y^2.$$

a predpokladajme, že:

(1) $f \in L^2(\Omega)$,

(2) $g \in L^2(\Gamma_c)$,

(3) existuje $u_0 \in H^1(\Omega) : Tu_0 = g$.

Funkciu $u \in H^1(\Omega)$ nazveme slabým riešením okrajovej úlohy ak:

(1) $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$,

(2) $\forall v \in V := H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$.

Bilineárna forma $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ je symetrická, $V-$ eliptická a spojitá. Za týchto predpokladov, ktoré sú kladené na bilineárnu formu sa dá ukázať, že riešenie variačnej rovnice je ekvivalentné minimalizácii energetického funkcionálu:

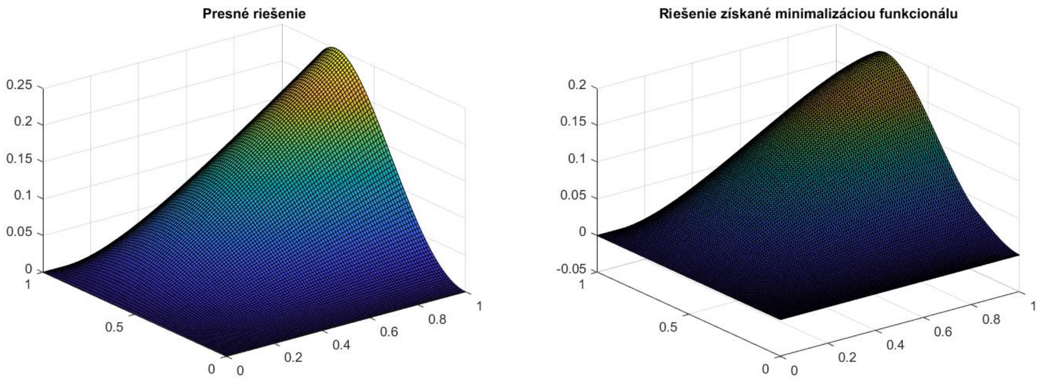
$$u \in H^1(\Omega) : \forall v \in H_0^1(\Omega) : J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v),$$

kde:

$$J(v) = a(v, v) - 2f(v), \text{ resp. } \frac{1}{2}a(v, v) - 2f(v).$$

Príklad 5.22 som riešil metódou kvadratického programovania, kde som minimalizoval kvadratickú funkciu $\frac{1}{2}v'Av + \tilde{f}'v$, kde A je matica tuhosti a $\tilde{f} = -f$ je vektor pravých strán, diskretizačný krok $h = 0,01$. Príslušný kód bude priložený v elektronickej prílohe.

Poznámka. 5.23 *"Skok" na obrázku vpravo je zapríčinený numerickou nestabilitou.*



Obr. 2: Presné riešenie a riešenie získané minimalizáciou energetického funkcionálu

"Skok"na obrázku vpravo je zapríčinený numerickou nestabilitou.

V tejto podkapitole bolo čerpané z [3], [4], [10], [12].

6 Variačné nerovnice

Signoriniho problém, ktorý spadá do kategórie tzv. **variačných nerovníc**, bol prvýkrát predstavený matematikom a fyzikom Antoniom Signorinim počas kurzu, kde vyučoval na Instito Nazionale di Alta Matematika v roku 1959, neskôr v tom istom roku publikoval aj článok, v ktorom rozšíril svoju predchádzajúcu verziu z roku 1933. Článok publikoval pod názvom: Problem with ambigous boundary conditions. Problematika v jeho článku nezahŕňala iba rovnosti, ale aj nerovnosti. Signorini skúmal a snažil sa zistiť, či je jeho problém dobre definovaný a odzrkadľuje reálny svet z fyzikálneho hľadiska . Zaoberal sa existenciou a jednoznačnosťou riešenia daného problému. Nakoniec v prvých dňoch januára 1963 matematik Ficher poskytol úplný dôkaz o existencii a jednoznačnosti riešenia Signoriniho problému.

Definícia. 6.1 *Nech V je Hilbertov priestor, nech $\emptyset \neq K \subset V$ je konvexná a uzavretá množina. Pod pojmom* ***variačná nerovnica*** *rozumieme úlohu nájsť $u \in K$ tak, aby:*

$$\forall v \in K: \ a(u, v-u) \geq F(v-u),$$

kde $a(u,w)$ je bilineárna forma na $V \times V$ a $F(w)$ je funkcionál na V, $w = v - u$.

6.1 Signoriniho úloha

6.1.1 Fyzikálny význam Signoriniho úlohy

Riešenie úlohy (1) uvedenej nižšie, môžeme z fyzikálneho hľadiska interpretovať ako priehyb membrány, ktorá je horizontálne naťahovaná jednotkovou silou a vertikálne zaťažená silou f. Membrána je pevne uchytená na časti hranice Γ_u. Na hranici Γ_c sa nachádza prekážka, vyjadrená funkciou g a membrána sa nesmie dostať pod prekážku.

Poslednú rovnosť v nižšie uvedenej úlohe je možné interpretovať tak, že v bodoch, v ktorých sa membrána nedotkne prekážky, bude sila pôsobiaca na membránu nulová a v bodoch styku s prekážkou uvažujeme silu nezápornú.

Neskôr ukážeme, že za určitého predpokladu, ktorý budeme klásť na funkciu zaťaženia f a pri položení $\Gamma_u = \emptyset$, tzv. **semikoercívny** prípad, bude zaručená existencia a jednoznačnosť riešenia priehybu membrány,

Z fyzikálneho hľadiska si môžeme tento semikoercívny prípad predstaviť tak, že ak vhodne rozložíme silu zaťaženia f, ktorá bude pôsobiť na membránu, taktiež dostaneme jednoznačný priehyb membrány, ako bude uvedené v ilustračných príkladoch neskôr. Jedná sa teda o určitý rovnovážny stav.

6.1.2 Slabá formulácia Signoriniho úlohy

Nech $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou. Uvažujme okrajovú úlohu v tvare:

$$\left\{ \begin{aligned} -\triangle u = f \quad v \quad \Omega, \\ u = 0 \quad na \quad \Gamma_u, \\ \tfrac{du}{dn} = 0 \quad na \quad \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c, \\ \tfrac{du}{dn} \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c \\ \tfrac{du}{dn}(u-g) = 0 \quad na \quad \Gamma_c, \end{aligned} \right. \tag{1}$$

pričom $\Gamma_u,\ \Gamma_f,\ \Gamma_c$ sú navzájom disjunktné podmnožiny Γ a $\Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c = \Gamma,\ f \in L^2(\Omega),\ g \in L^2(\Gamma_c),$ meas $\Gamma_c > 0$.

Definícia. 6.2 *Funkciu $u : \Omega \to \mathbb{R}$, ktorá splňuje (1), nazveme **klasickým riešením** Signoriniho úlohy.*

Nech $V := \{v \in H^1(\Omega),\ Tv = 0 \ \ na \ \ \Gamma_u\}$. V je podľa vety 5.17 uzavretým podpriestorom Sobolevovho priestoru $H^1(\Omega)$. Definujme ďalej množinu $K := \{v \in V :\ Tv - g \geq \ 0 \ \ na \ \ \Gamma_c\}$. Pred odvodením slabej formulácie ukážme, že množina K je **uzavretá** a **konvexná**.

Dôkaz

(1)**Uzavretosť.**

Zvoľme postupnosť $(v_n) \subset K : \lim_{n\to\infty} v_n = v,\ v \in V$. Treba ukázať, že $v \in K$. Zo spojitosti operátora T a z vlastnosti limity plynie, že:

$$\lim_{n\to\infty} Tv_n = Tv.$$

Keďže $\forall n \in \mathbb{N};\ Tv_n \geq g$, limitným prechodom dostávame $Tv \geq g$. Tým je uzavretosť množiny K dokázaná.

(2)**Konvexnosť.**

Nech $v, w \in K$, nech $t \in \langle 0, 1\rangle$. Označme $s = tv + (1-t)w$. Z definície konvexnosti množiny K treba ukázať, že aj $s \in K$, t.j. máme ukázať, že $Ts \geq g$:

$$Ts = T(tv + (1-t)w) = tTv + (1-t)Tw \geq tg + (1-t)g = g,$$

a teda $s \in K$.

∎

Teraz odvoďme slabú formuláciu úlohy (1).

Predpokladajme, že u je klasické riešenie Signoriniho úlohy, potom platí:

$$\forall w \in V: \; -\int_\Omega \triangle u w dx = \int_\Omega f w dx.$$

S využitím Greenovej vety dostávame:

$$\forall w \in V: \; \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown w dx - \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} Tw dS = \int_\Omega f w dx.$$

$$\forall w \in V: \; \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown w dx - \int_{\Gamma_u} \frac{du}{dn} Tw dS - \int_{\Gamma_f} \frac{du}{dn} Tw dS - \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn} Tw dS = \int_\Omega f w dx.$$

Pretože $\forall w \in V: \; Tw = 0 \;\; na \;\; \Gamma_u$ a $\frac{du}{dn} = 0 \;\; na \;\; \Gamma_f$ obdržíme:

$$\forall w \in V: \; \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown w dx - \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn} Tw dS = \int_\Omega f w dx.$$

Položme ďalej $w = v - u, \; v \in K$, potom:

$$\forall v \in K: \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown (v-u) dx - \int_\Omega f(v-u) dx = \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn} T(v-u).$$

Operátor T je lineárny a o funkcii u predpokladáme, že je dostatočne hladká, preto $T(v(x) - u(x)) = Tv(x) - u(x)|_{\partial\Omega}$. V bodoch na Γ_c, kde $u(x) - g(x) > 0$ platí, $\frac{du(x)}{dn} = 0$ a v bodoch, kde $u(x) - g(x) = 0$, platí $\frac{du(x)}{dn}(Tv(x) - u(x)) = \frac{du(x)}{dn}(Tv(x) - g(x))$. Z toho, ako je definovaná množina K a z podmienky $\frac{du(x)}{dh} \geq 0$ dostávame:

$$\forall v \in K: \; \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn}(Tv - u) \geq 0.$$

Teda:

$$\forall v \in K: \; \underbrace{\int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown (v-u) dx}_{a(u, v-u)} \geq \underbrace{\int_\Omega f(v-u) dx}_{F(v-u)}.$$

Tým sme odvodili slabú formuláciu Signoriniho úlohy.

Definícia. 6.3 *Funkciu $u \in K$ nazveme **slabým riešením** úlohy* (1)*, ak :*

$$\forall v \in K: \; \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown (v-u) dx \geq \int_\Omega f(v-u) dx.$$

Predpokladajme, že existuje slabé riešenie u Signoriniho úlohy. Predpokladajme, že všetky dáta[10] úlohy sú dostatočne hladké, a taktiež samotné riešenie u je dostatočne hladké. Ukážme, že v tomto prípade je slabé riešenie zároveň klasickým.

Náznak dôkazu

(a)

Nech $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ a položme $v := u \pm \varphi$. Pre funkciu v platí, že $Tv = T(u \pm \varphi) = Tu \pm T\varphi = 0$, pretože $u \in K$ a $T\varphi = 0$, a tiež $v = u \pm \varphi \geq g$ na Γ_c, pretože $\varphi = 0$ na Γ_c. Teda:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : \int \nabla u \nabla(\pm\varphi) dx \geq \int f(\pm\varphi) dx.$$

Dostávame tak:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : \int \nabla u \nabla \varphi dx \geq \int f \varphi dx,$$

resp.

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : -\int \nabla u \nabla \varphi dx \geq -\int f \varphi dx.$$

Z uvedených nerovností dostávame:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : \int \nabla u \nabla \varphi dx = \int f \varphi dx.$$

Z toho, ako je definovaná funkcia φ a vzhľadom k tomu, že dáta a riešenie úlohy predpokladáme dostatočne hladké, môžeme použiť Greenovu vetu a dostávame:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : \int_\Omega (-\triangle u - f)\varphi = 0 \Rightarrow -\triangle u = f.$$

(b)

$$\forall v \in K : \int_\Omega \nabla u \nabla(v-u) dx \geq \int_\Omega f(v-u) dx.$$

Užitím Greenovej vety:

$$\forall v \in K : \int_\Omega -\triangle u(v-u) dx + \int_\Gamma \frac{du}{dn}(v-u) dS \geq \int_\Omega f(v-u) dx,$$

a teda:

$$\forall v \in K : \int_\Omega (-\triangle u - f)(v-u) + \int_\Gamma \frac{du}{dn}(v-u) dS \geq 0.$$

Kedže $-\triangle u = f$ dostávame:

[10] t.j. funkcie f a g.

$$\int_{\Gamma_u} \frac{du}{dn}(v-u)dS + \int_{\Gamma_f} \frac{du}{dn}(v-u)dS + \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn}(v-u)dS \geq 0.$$

Kedže $v = u = 0$ na Γ_u dostávame:

$$\int_{\Gamma_u} \frac{du}{dn}(v-u)dS = 0,$$

teda:

$$\int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn}(v-u)dS + \int_{\Gamma_f} \frac{du}{dn}(v-u)dS \geq 0.$$

Voľbou $v = u$ na Γ_c, resp. $v = u$ na Γ_f dostávame, že oba integrály sú nezáporné.

Ukážeme, že $\frac{du}{dn} = 0$ na Γ_f

Sporom, nech $\frac{du}{dn} \neq 0$ na Γ_f. Potom existuje okolie $O \subset \Gamma_f$, na ktorom je bez ujmy na všeobecnosti $\frac{du}{dn} > 0$. Zvoľme $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tak, že $\varphi = 0$ na $\Gamma_f \setminus O$ a $\varphi > 0$ na O a nech $v = u - \varphi$. Zrejme $v \in K$.

Potom zrejme:

$$\int_{\Gamma_f} \frac{du}{dn}(v-u)dS = \int_{\Gamma_f} \frac{du}{dn}(-\varphi)dS = \int_O \underbrace{\frac{du}{dn}}_{>0} \underbrace{(-\varphi)}_{<0} dS < 0,$$

čo je spor.

(d)

Ukážme, že $\frac{du}{dn} \geq 0$ na Γ_c sporom. Nech teda $\frac{du}{dn} < 0$ na Γ_c, potom existuje okolie $O \subset \Gamma_c$, také, že$\frac{du}{dn} < 0$ na O. Zvoľme $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tak, že $\varphi = 0$ na $\Gamma_c \setminus O$ a $\varphi > 0$ na O a nech $v = u + \varphi$. Zrejme $v \in K$. Potom:

$$\int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn}(v-u)dS = \int_{\Gamma_c} \frac{du}{dn}\varphi dS = \int_O \underbrace{\frac{du}{dn}}_{<0} \underbrace{\varphi}_{>0} dS < 0,$$

čo je spor.

(e)

Obdobným princípom sa ukáže, že $\frac{du}{dn}(u-g) = 0$ na Γ_c. viď[12].

6.1.3 Existencia a jednoznačnosť riešenia

Veta. 6.4 (Zovšeobecnená Lax-Milgrammova)

- *Nech V je Hilbertov priestor,*
- $\emptyset \neq K \subset V$ *je konvexná a uzavretá množina,*
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *je:*
  - *bilineárna,*
  - *spojitá, t.j.* $\exists k > 0\ \forall u, v \in V :\ |a(u,v)| \leq k||u||.||v||$,
  - *eliptická, t.j.* $\exists c > 0\ \forall u \in V :\ a(u,u) \geq c||u||^2$,
  - *symetrická, t.j.* $\forall u, v \in V :\ a(u,v) = a(v,u)$,
- $f \in V^*$.
- $u \in K$

Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(VN) $\forall v \in K : a(u, v-u) \geq f(v-u)$,

(EF) $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$, *kde* $J(v) = a(v,v) - 2f(v)$[11].

A navyše existuje práve jedno $u \in K$, ktoré rieši variačnú nerovnicu (VN), resp. minimalizuje energetický funkcionál (EF).

Pred tým, ako túto vetu dokážeme, uveďme ešte potrebnú vetu, ktorá nám poslúži pri dôkaze jednoznačnosti.

Veta. 6.5

- *Nech V je Hilbertov priestor,*
- $\emptyset \neq K \subset V$ *je konvexná a uzavretá množina,*
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *je bilineárna, spojitá, $V-$eliptická,*
- $f_1,\ f_2 \in V^*,\ u_1, u_2 \in V$,
- $\forall v \in K :$

$$(i)\quad a(u_1, v-u_1) \geq f_1(v-u_1),$$

$$(ii)\quad a(u_2, v-u_2) \geq f_2(v-u_1).$$

[11] V práci taktiež používam $\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$.

Potom:

$$||u_1 - u_2||_V \le \frac{1}{c}||f_1 - f_2||_{V^*},$$

kde $c > 0$ je konštanta $V-$ elipticity.

Dôkaz

Zvoľme v (i) $v = u_2$ a v (ii) $v = u_1$, potom dostávame:

$$a(u_1, u_2 - u_1) \ge f_1(u_2 - u_1),$$
$$a(u_2, u_1 - u_2) \ge f_2(u_1 - u_2).$$

Z linearity bilineárnej formy môžeme druhú nerovnosť upraviť:

$$-a(u_2, u_2 - u_1) \ge -f_2(u_2 - u_1).$$

Teraz sčítajme tieto nerovnosti:

$$a(u_1, u_2 - u_1) \ge f_1(u_2 - u_1),$$
$$-a(u_2, u_2 - u_1) \ge -f_2(u_2 - u_1).$$

Teda po úpravách a sčítaní:

$$a(u_1 - u_2, u_2 - u_1) \ge (f_1 - f_2)(u_2 - u_1).$$

Po prenásobení -1:

$$a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \le (f_1 - f_2)(u_1 - u_2).$$

A teda:

$$c||u_2 - u_1||^2 \le a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \le (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) \le ||f_1 - f_2||.||u_1 - u_2||.$$

Kde sme využili $V-$elipticitu a nerovnosť vo vete 4.5.

Po vydelení predchádzajúcej nerovnosti normou $||u_2 - u_1||$ dostávame požadovanú nerovnosť, čím je dôkaz hotový.

■

Teraz dokážeme spomínanú vetu 6.4

Dôkaz

"$(VN) \Rightarrow (EF)$"

Nech $u \in K$ je dané, u rieši (VN). Nech $v \in K$. Potom $J(v) = J(u + (v - u)) = a(u + (v - u), u + (v - u)) - 2f(u + (v - u)) = a(u, u) + 2a(u, v - u) + a(v - u, v - u) - 2f(u) - 2f(v - u) \geq a(u, u) - 2f(u) = J(u)$, pretože: $a(v - u, v - u) \geq c||v - u||^2 \geq 0$ a u rieši variačnú nerovnicu: $\forall v \in K \; a(u, v - u) \geq f(v - u)$.

"$(VN) \Leftarrow (EF)$"

Nech $v \in K$. $\forall t \in \langle 0, 1\rangle$ definujme reálnu funkciu premennej t, $h(t) := J(u + t(v - u))$. Z toho, že množina K je konvexná, plynie $u + t(v - u) \in K$. Potom z predpokladu plynie : $J(u) = h(0) \leq h(t)$, a preto ak $\exists h^{'}(0_+)$, je $h^{'}(0_+) \geq 0$.

$h(t) = a(u + t(v - u), u + t(v - u)) - 2f(u + t(v - u)) = a(u, u) + 2ta(u, v - u) + t^2 a(v - u, v - u) - 2f(u) - 2tf(v - u)$, a preto po zderivovaní podľa t dostávame:

$$0 \leq h^{'}(0_+) = 2a(u, v - u) - 2f(v - u).$$

Existencia. $\min_{v \in K} J(v)$**:**

Z definície infima plynie, že existuje postupnosť $(u_n) \subset K$ taká, že $J(u_n) \to i := \inf_{v \in K} J(v)$. Keďže $K \neq \emptyset$, $i < \infty$.

Norma $||u||_a := \sqrt{a(u, u)}$ je slabo zdola polospojitý funkcionál. Aby sme naše nasledujúce úvahy mohli aplikovať na normu $||u||$, musíme ukázať, že táto norma je ekvivalentná s normou $||u||_a$. To je však jednoduché, pretože z $V-$elipticity a spojitosti normy dostávame:

$$\sqrt{c}||u|| \leq ||u||_a \leq \sqrt{k}||u||,$$

tým sme ukázali, že príslušné normy sú ekvivalentné a dávajú nám rovnaké slabé konvergencie.

Pre $v \in K$:

$$J(v) = a(v, v) - 2f(v) \geq c||v||^2 - 2||f||.||v|| \to \infty \text{ pre} ||v|| \to \infty$$

je funkcionál $J(v)$ koercívny na K. Teda postupnosť $||u_n||$ je ohraničená. Priestor V je reflexívny[12], teda existuje $u \in V : (u_{n_k}) \rightharpoonup u$. Zatiaľ vieme, že $u \in V$ a pre účel dôkazu potrebujeme, aby $u \in K$. Podľa vety 5.10, platí $u \in K$. keďže norma je slabo zdola polospojitý funkcionál a $f(u)$ je lineárny, máme dolný odhad pre funkcionál $J(v)$.

$$i = \liminf_{k \to \infty} J(u_{n_k}) \geq ||u||^2 - 2f(u) = J(u),$$

[12]Každý Hilbertov priestor je reflexívny.

Z toho plynie:

$$J(u) = i = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

Jednoznačnosť. Predpokladajme sporom, že existujú dve rôzne riešenia variačnej nerovnice $u_1 \neq u_2$:

$$a(u_1, v - u_1) \geq f(v - u_1),$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq f(v - u_2).$$

S využitím vety 6.5 dostávame:

$$0 \leq ||u_1 - u_2|| \leq 0.$$

Teda $u_1 = u_2$, čo je spor s predpokladom.

■

Ďalej budeme pracovať s bilineárnou formou, ktorá nie je nutne symetrická. Z kapitoly 3 vieme, že každú bilineárnu formu môžeme rozložiť na jej symetrickú a antisymetrickú zložku.

Nech $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ je bilineárna forma. Definujme $\forall t \in < 0, 1 >$:

$$a_t(u, v) := a_s(u, v) + t a_a(u, v).$$

Ukážme, že symetria bilineárnej formy nie je nevyhnutná k tomu, aby existovalo práve jedno riešenie variačnej nerovnice, avšak strácame ekvivalenciu s minimalizáciou energetického funkcionálu.

Uveďme pomocné Lemma:

Lemma. 6.6 *Nech $\mathcal{T} \in \langle 0, 1\rangle$ je také, že $\forall F \in V^*$ existuje riešenie variačnej nerovnice, t.j:*

$$u \in K : \forall v \in K : \ a_{\mathcal{T}}(u, v - u) \geq F(v - u).$$

Potom:

$$\forall t \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{T} + t_0\rangle \ \forall f \in V^*$$

existuje riešenie (VN):

$$u \in K : \forall v \in K : \ a_t(u, v - u) \geq f(v - u).$$

kde $0 \leq t_0 < \frac{c}{k}$, kde c je konštanta elipticity a k je konštanta spojitosti.
Dôkaz *viď [**?**].*

Teraz môžeme formulovať vyššie spomínanú existenčnú vetu:

Veta. 6.7

- *Nech V je Hilbertov priestor,*
- $\emptyset \neq K \subset V$ *je konvexná a uzavretá množina,*
- $a(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ *je spojitá, eliptická, bilineárna.*
- $f \in V^*$.

Potom $\exists!\ u \in K$*, ktoré rieši* (VN)*:*

$$\forall v \in K : a(u, v-u) \geq f(v-u),$$

Dôkaz

Jednoznačnosť automaticky plynie z vety 6.5.
Nech $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$a_t(u, v) := a_S(u, v) + t a_A(u, v).$$

Platí:

- $a_1(u, v) = a_S(u, v) + a_A(u, v) = a(u, v)$,
- $a_t(u, u) = a_S(u, u) + a_A(u, u) = a(u, u) \geq c||u||^2 t.j\ V-$elipticita,
- $|a_t(u, v)| = |a_S(u, v) + a_A(u, v)| \leq |a_S(u, v)| + |a_A(u, v)| \leq k||u||||v|| + k||u||||v||$ t.j $V-$spojitosť,
- $|a_A(u, v)| \leq k||u||.||v||$.

Krok 1.

Zvoľme $\mathcal{T}_0 = 0$, potom bilineárna forma $a_0(u, v) = a_s(u, v)$, teda je symetrická a podľa vety 6.4 máme:

$$(\forall F \in V^*)(\exists u \in K) : (\forall v \in K) : \ a_0(u, v-u) \geq F(v-u).$$

Krok 2.

Zvoľme $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 + t$, kde $t \leq t_0$, potom podľa predchádzajúceho lemmatu platí:

$$(\forall F \in V^*)(\exists u \in K) : (\forall v \in K) : a_{(\mathcal{T}_0 + t)}(u, v-u) \geq F(v-u).$$

Krok 3.

Zvoľme $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 + t$ a postupujeme analogicky, až po konečnom počte krokov sa dostaneme do predposlednej iterácie, kde $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{n-1} - \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je vhodne zvolené tak, aby $\mathcal{T}_n = 1$.

$\vdots$

Krok n.

Máme $\mathcal{T}_n = 1$, dostávame tak, že:

$$\forall F \in V^* \; \exists u \in K : \forall v \in K : \; a_1(u, v-u) = a(u, v-u) \geq f(v-u).$$

Tým je dôkaz hotový.

■

V tejto podkapitole bolo čerpané z [7], [8], [11], [12].

6.2 Algoritmus MPRGP(MODIFIED PROPORTIONING WITH REDUCED GRADIENT PROJECTIONS)

Druhým spôsobom, ktorým budeme riešiť Signoriniho úlohu, bude pomocou algoritmu MPRGP, ktorý bol vyvíjaný na katedre aplikovanej matematiky, Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB TUO. Na katedre boli pomocou tohoto algoritmu riešené veľké sústavy v rádoch biliónov v prostredí HPC.

Odvodenie algoritmu
Uvažujme problém, nájsť:

$$\min_{u \in \Omega} J(u),$$

kde $\Omega = \{u : u \geq l\}$; $J(u) = \frac{1}{2}u^T A u - u^T f$, kde l a f sú stĺpcové $n-$rozmerné vektory, f je vektor pravej strany. A je SPD matica tuhosti.

Označme gradient $J : g = g(u) = Au - f$. Riešenie problému označme $\overline{u}$. KKT podmienky optimality pre $i = 1, \dots, n$ definujeme:

$$\text{ak } \overline{u}_i = l_i, \text{ potom } \overline{g}_i \geq 0,$$

$$\text{ak } \overline{u}_i > l_i, \text{ potom } \overline{g}_i = 0.$$

Nech $\mathscr{N}$ značí indexovú množinu, nech $\mathscr{A}(u)$ je aktívna množina a $\mathscr{F}$ je jej doplnok.
Označme: $\nu(u) = \varphi(u) + \beta(u)$ je projekcia gradientu a $\varphi(u), \beta(u)$ sú definované:

$$\varphi_i(u) = g_i(u) \text{ pre } i \in \mathscr{F}(u), \; \varphi_i(u) = 0 \text{ pre } i \in \mathscr{A}(u),$$

$$\beta_i(u) = 0 \text{ pre } i \in \mathscr{F}(u),\ \beta_i(u) = g_i^-(u), \text{pre } i \in \mathscr{A},$$

kde $g_i^-(u) = \min\{g_i, 0\}$.

Číslo podmienenosti matice A je definované: $\mathcal{K}(A) = ||A||.||A^{-1}||$, kde $||A|| = \max\{\lambda_i, \lambda_i \in \sigma(A), i = 1, \ldots, n\}$.

Pre každý $n-$rozmerný stĺpcový vektor definujme projekciu:

$$P_\Omega(u) = l + (u - l)^+,$$

kde $(u - l)^+ := y^+$, kde $y^+ = \max\{y_i, 0\}$.

Krok 1. " The expansion step.". Expanzný krok je definovaný:

$$u^{k+1} = P_\Omega(u^k - \overline{\alpha}\varphi(u^k)),$$

kde $\overline{\alpha} \in (0, ||A||^{-1}\rangle$ je pevné.
Bez použitia projekcie P_Ω sa dá ukázať, že

$$P_\Omega(u - \overline{\alpha}\varphi(u)) = u - \overline{\alpha}\tilde{\varphi}(u),$$

kde

$$\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_i(u) = \min\{(u_i - l_i)/\overline{\alpha}, \varphi_i\}.$$

Potom po preznačení:

$$P_\Omega(u - \overline{\alpha}g(u)) = u - \overline{\alpha}(\tilde{\varphi}(u) - \beta(u)).$$

Ak je splnená nerovnosť:

$$||\beta(u^k)||^2 \leq \Gamma^2 \tilde{\varphi}(u^k)^T \varphi(u^k),$$

nazveme iteráciu u^k **striktne proporcionálnou**.

Krok 2. "The proportioning step". Proporcionálny krok je definovaný:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{cg}\beta(u^k)$$

s krokom α_{cg}. Dá sa ľahko ukázať, že optimálnu voľbu kroku α_{cg}, minimalizujúceho $f(u - \alpha d)$ pre d dané, je možné vyjadriť:

$$\alpha_{cg} = \alpha_{cg}(d) = \frac{d^T g(u)}{d^T A d}.$$

Poznamenajme, že ak $u^k \in \Omega$, potom aj $u^{k+1} = u^k - \alpha_{cg}\beta(u^k) \in \Omega$.

Krok 3. "The conjugate gradient step". Krok združených gradientov je definovaný:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{cg} p^k,$$

kde p^k je smer združeného gradientu konštruovaný rekurentne.

$p^s \varphi(u^s)$ vždy, keď u^s je iterácia generovaná krokom 1 alebo krokom 2. Ak je p^k známe, potom p^{k+1} určíme:

$$p^{k+1} = \varphi(u^k) - \gamma p^k, \text{ kde } \gamma = \frac{\varphi(u^k)^T A p^k}{(p^k)^T A p^k}.$$

V rámci stručnosti uvádzam v tejto práci iba pseudokód, podrobný algoritmus implementovaný v Matlabe bude priložený v elektronickej podobe.

V tejto podkapitole bolo čerpané z [9].

Algorithm 1 (MODIFIED PROPORTIONING WITH REDUCED GRADIENT PROJECTION(MPRGP))

Nech je daná symetrická pozitívne definitná matica A typu $n \times n$, stĺpcové vektory b a l dĺžky n, $\Omega = \{x : l \leq x\}$, $x^0 \in \Omega$, $\Gamma > 0$, $\overline{\alpha} \in (0, ||A||^{-1}\rangle$ a $\varepsilon > 0$.

```
procedure MPRGP
{Inicializácia}
    Polož k = 0,  r = Ax^0 − b,  p = φ(x^0)
    while ||ν(x^k)||^2 > ε do
        if ||β(x^k)||^2 ≤ Γ φ̃(x^k)^T ϕ(x^k) then
            {Proportional x^k. Trial conjugate gradient step.}
            α_cg = r^T p/(p^T Ap),  y = x^k − α_cg p
            α_f = max{α : x^k − αp ∈ Ω}
            if α_cg ≤ α_f then
                {Conjugate gradient step.}
                x^{k+1} = y,  r = r − α_cg Ap
                γ = φ(y)^T Ap/(p^T Ap),  p = φ(y) − γp
            else
                {Expansion step.}
                x^{k+1/2} = x^k − α_f p,  r = r − α_f Ap
                x^{k+1} = P_Ω(x^{k+1/2} − ᾱφ(x^{k+1/2}))
                r = Ax^{k+1} − b,  p = φx^{k+1}
        else
            {Proportioning step.}
            d = β(x^k),  α_cg = r^T d/(d^T Ad)
            x^{k+1} = x^k − α_cg d,  r = r − α_cg Ad,  p = φ(x^{k+1})
        k = k + 1
{Riešenie}
    return x = x^k
```

6.3 Numerické experimenty Signoriniho úlohy

Príklad. 6.8 *Nech* $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ \Omega := (0,1) \times (0,1)$.

Jedná sa teda o ohraničenú oblasť s lipschitzovskou hranicou.

$$\begin{cases} -\triangle u = f \quad v \quad \Omega, \\ u = 0 \quad na \quad \Gamma_u, \\ \frac{du}{dn} = 0 \quad na \quad \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn} \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c \\ \frac{du}{dn}(u-g) = 0 \quad na \quad \Gamma_c, \end{cases}$$

kde:

$$\Gamma_u := \{(0,y) : y \in (0,1)\},$$

$$\Gamma_c := \{(1,y) : y \in (0,1)\},$$

$$\Gamma_f := \Gamma \setminus (\Gamma_u \cup \Gamma_c).$$

$$f(x,y) := \begin{cases} -125x(2y-1)^2(60y^2-100y+41), \quad y \geq \frac{1}{2}, \\ \left[\frac{125\pi^2 y^2 (2y-1)^4}{8} - 125(2y-1)^2(60y^2-20y+1)\right]\sin(\frac{\pi x}{2}), \quad y \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$g(1,y) := \begin{cases} 1000(1-y)^2(y-\frac{1}{2})^4, \quad y \geq \frac{1}{2}, \\ 3000y^4(y-\frac{1}{2})^4, \quad y \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

6.3.1 Riešenie Signoriniho úlohy minimalizáciou energetického funkcionálu a numerické experimenty

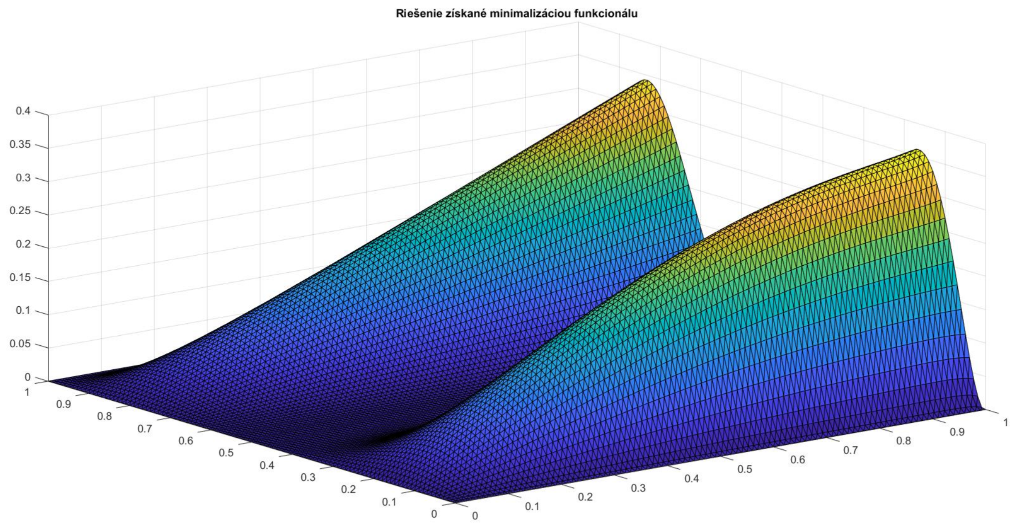
Taylorova veta nám umožňuje nahradiť prírastok funkcie f na okolí daného bodu x^* lineárnym diferenciálom, kvadratickým modelom, resp. tenzorom vyššieho rádu.
Pokiaľ je funkcia f kvadratická, t.j. je daná predpisom:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \text{ a } A = A^T,$$

potom

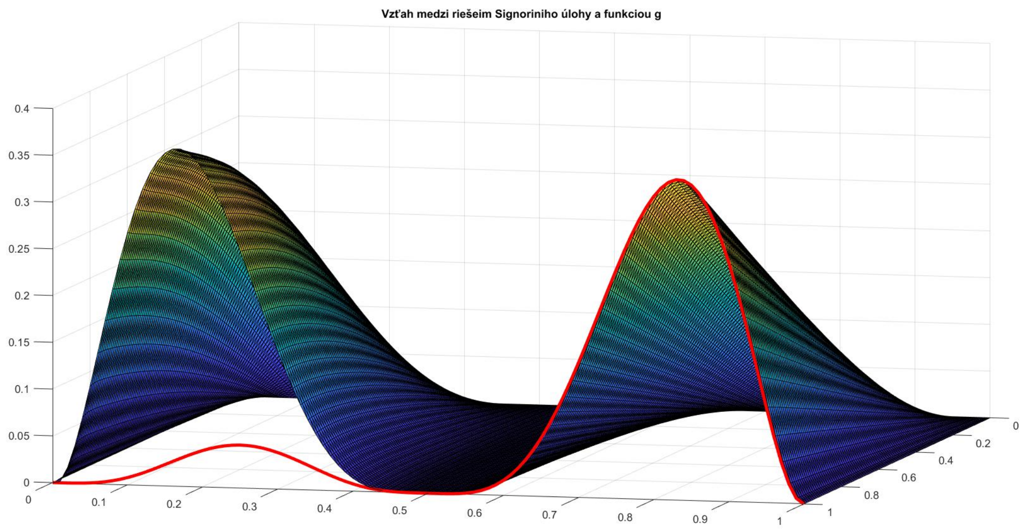
$$\nabla f(x) = Ax - b \text{ a } \nabla^2 f(x) = A.$$

Úlohu som riešil metódou kvadratického programovania, kde som minimalizoval kvadratickú funkciu (energetický funkcionál) s KKT[13] podmienkou ohraničenia na nerovnosť. Podrobný algoritmus implementovaný v Matlabe prikladám v elektronickej podobe.



Obr. 3: Riešenie Signoriniho úlohy získané minimalizáciou kvadratického(energetického) funkcionálu.

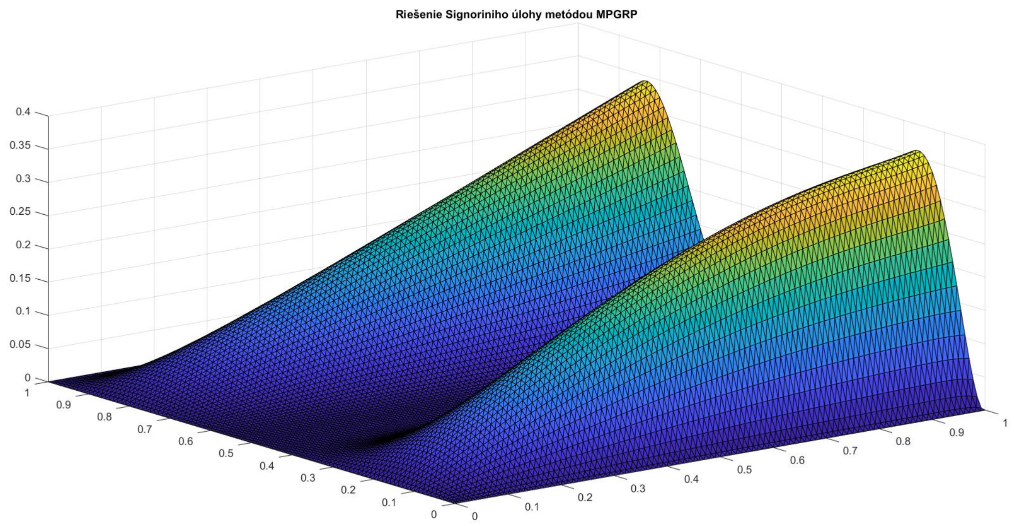
[13]Karush-Kuhn-Tuckerove podmienky.



Obr. 4: Vzťah medzi riešením Signoriniho úlohy získaného minimalizáciou kvadratického funkcionálu a funkciou g.

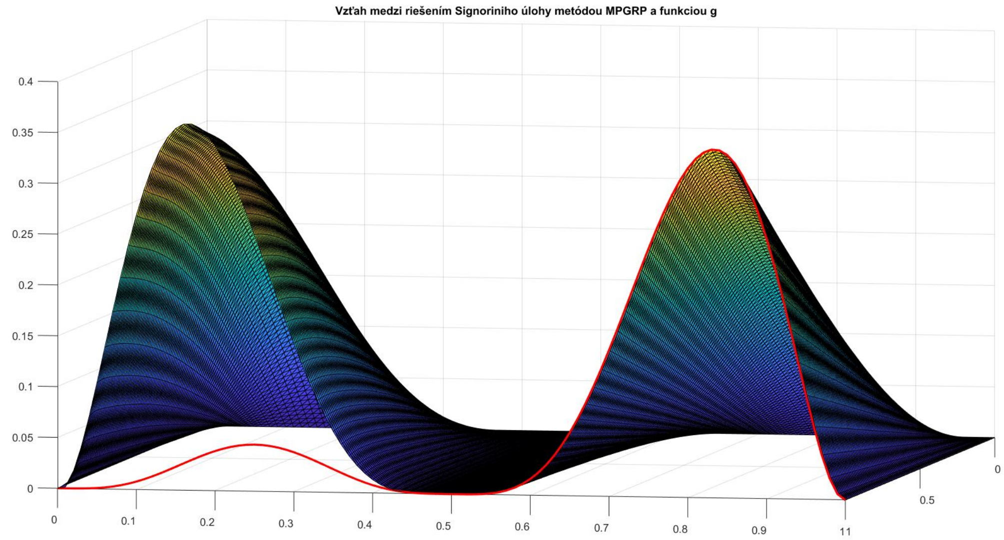
6.3.2 Riešenie Signoriniho úlohy algoritmom MPRGP

Všetky potrebné informácie ohľadom algoritmu MPRGP je možné nájsť v predchádzajúcej kapitole.



Obr. 5: Riešenie Signoriniho úlohy pomocou algoritmu MPRGP.

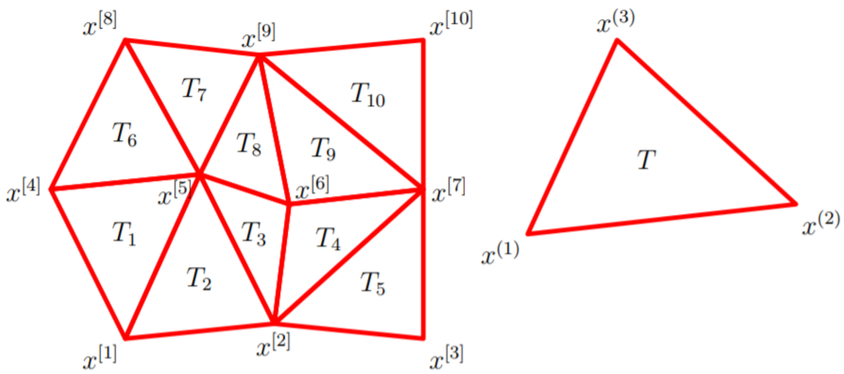
V tejto podkapitole bolo čerpané z [4], [11], [16].



Obr. 6: Vzťah medzi riešením Signoriniho úlohy pomocou algoritmu MPRGP a funkciou g.

6.3.3 Analýza čísla podmienenosti matice tuhosti A a diskretizačného kroku h

Nech h je diskretizačný krok a $\mathcal{T}_h$ je triangulizácia oblasti Ω, čím rozumieme delenie oblasti Ω na trojuholníky T_i tak, že dva trojuholníky, ktoré nie sú zhodné alebo disjunktné, majú spoločnú buď celú stranu alebo jeden vrchol, čo je ilustrované na nasledujúcom obrázku.



Obr. 7: Triangulizácia.

Nech $\mathcal{N}_h$ predstavuje množinu uzlov a elementy aj uzly sú indexované:

$$\mathcal{N}_h = \{x^i\}_{i=1}^n \text{ a } \mathcal{T}_h = \{T_i\}_{i=1}^m.$$

V práci uvažujeme pri numerických experimentoch iba mnohouholníkovú oblasť. Definujme priestor lineárnych konečných prvkov U_h tak, že zavedieme uzlovú bázu tvorenú funkciami:

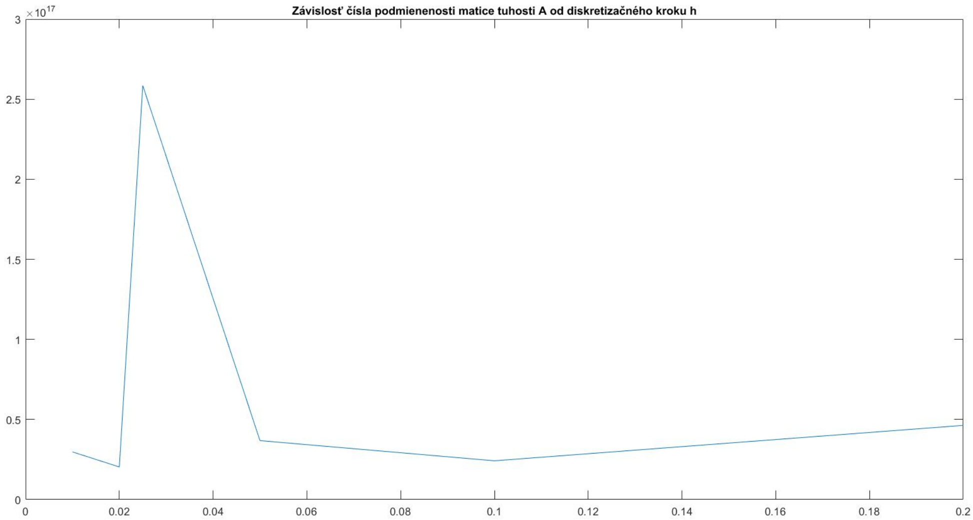
$$\phi_i(x^j) = \delta_{ij}{}^{14},\ \phi_i|_T \in P_1{}^{15},\ \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Lineárne kombinácie funkcií ϕ_i tvoria MKP priestor U_h, ktorý je podpriestorom Sobolevovho priestoru $H^1(\Omega)$.

Lokálna **MKP matica tuhosti** má tvar:

$$a(\phi_j, \phi_i) = \int_\Omega \langle \nabla(\phi_j), \nabla(\phi_i) \rangle dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \sum_{pg} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_p} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_q} dx.$$

Na nasledujúcom obrázku je znázornená závislosť diskretizačného kroku h a príslušného čísla podmienenosti matice tuhosti A. Z obrázku je vidno, že pre diskretizačný krok h z intervalu $\langle 0.01, 0.2 \rangle$ je $\varkappa(A)$ rádu 10^{17}, a teda úloha je dobre podmienená.



Obr. 8: Závislosť čísla podmienenosti matice tuhosti A od diskretizačného kroku h.

[14] t.j. Kroneckerovo delta

[15] Množina lineárnych funkcií

6.4 Semikoercívny prípad priehybu membrány

Nech $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblasť s lipschitzovskou hranicou $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_c,\ meas(\Gamma_c) > 0$.

Pod pojmom **semikoercívna úloha** budeme rozumieť variačnú nerovnicu v tvare:

$$\begin{cases} -\triangle u = f \quad v \quad \Omega, \\ \frac{du}{dn} = 0 \quad na \quad \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn} \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c \\ \frac{du}{dn}(u-g) = 0 \quad na \quad \Gamma_c, \end{cases}$$

Všimnime si, že pokladáme $\Gamma_u := \emptyset$.

Príklad. 6.9 *V semikoercívnej úlohe položme:*

$$\Omega := (0,1) \times (0,1),$$

$$\Gamma_c := \{(1,y) : y \in (0,1)\},$$

$$\Gamma_f := \Gamma \setminus (\Gamma_c).$$

6.5 Existencia a jednoznačnosť riešenia semikoercívneho prípadu

Voľme priestor testovacích funkcií $V := H^1(\Omega)$, $K := \{v \in H^1(\Omega) : Tv - g \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\}$. Množina K je konvexná a uzavretá.

Funkcionál $J(v)$ má opäť tvar:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega - \int_\Omega fv d\Omega.$$

Podľa vety 5.12 existuje minimum funkcionálu $J(v)$, ak je slabo zdola polospojitý a koercívny na množine K.

Podľa vety 5.13 ak je funkcionál J spojitý a konvexný na množine K, potom je slabo zdola polospojitý na K.

Funkcionál $J(v)$ je spojitý. Ukážme teraz konvexitu funkcionálu. Nech $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Potom:

$$J(\alpha u+(1-\alpha)v)=\frac{1}{2}\int_\Omega[\nabla(\alpha u+(1-\alpha)v)]^2d\Omega-\int_\Omega f(\alpha u+(1-\alpha)v)d\Omega$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega|\alpha\nabla u+(1-\alpha)\nabla v|^2d\Omega-\alpha\int_\Omega fud\Omega-(1-\alpha)\int_\Omega fvd\Omega$$
$$=\frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2d\Omega+\alpha(1-\alpha)\int_\Omega|\nabla u\nabla v|d\Omega+\frac{(1-\alpha)^2}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2d\Omega-\alpha\int_\Omega fu-(1-\alpha)\int_\Omega fv$$
$$\overset{(1)}{\leq}\frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2d\Omega+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)d\Omega+\frac{(1-\alpha)^2}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2d\Omega-$$
$$\alpha\int_\Omega fud\Omega-(1-\alpha)\int_\Omega fv=\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v),$$

kde v (1) sme použili Youngovu nerovnosť[16].

Rozoberme varianty, za akých podmienok kladených na funkciu zaťaženia f je $J(v)$ koercívny.

Pripomeňme, že funkcionál $J(v)$ je koercívny na konvexnej množine ak:

$$\lim_{v\in K,||v||\to\infty}J(v)=\infty$$

Nech k je také, že :

$$\int_{\Gamma_c}(v-k)dS=0\Rightarrow\int_{\Gamma_c}vDs=k\int_{\Gamma_c}dS,$$

a teda:

$$k=\frac{1}{meas(\Gamma_c)}\int_{\Gamma_c}vdS.$$

Všimnime si, že $k=k_v$ závisí od testovacej funkcie $v\in K$. V rámci stručnosti píšeme namiesto k_v iba k.

Položme $v=v-k+k$.

$$J(v-k+k)=J(v)=\int_\Omega|\nabla(v-k)|^2d\Omega-\int_\Omega f(v-k)d\Omega-k\int_\Omega fd\Omega\geq$$

$$\overset{(1)}{\geq}s^2||v-k||_{1,2}^2-||f||_{L^2(\Omega)}||v-k||_{L^2(\Omega)}-k\int_\Omega fd\Omega\geq$$

$$\overset{(2)}{\geq}s^2||v-k||_{1,2}^2-||f||_{L^2(\Omega)}||v-k||_{1,2}-k\int_\Omega fd\Omega,$$

kde sme postupne v (1) použili ekvivalenciu noriem $||\cdot||_{1,2,0}$ a $||\cdot||_{1,2}$ podľa Friedrichsovej vety a odhad z vety 4.5 a v (2) sme použili odhad $||u||_{1,2}\geq||u||_{L^2(\Omega)}$. Tým pádom dostávame

[16] t.j. $ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$.

parabolu v premennej $||v-k||_{1,2}$ posunutú o $k\int_\Omega f d\Omega$. Zaujíma nás, kedy bude funkcionál $J(v)$ koercívny.

Kedže $v = v - k + k$ z trojuholníkovej nerovnosti máme:

$$||v|| \leq ||v-k|| + ||k||$$

.

Norma $||v|| \to \infty$ a $||v-k|| + ||k||$ je majoranta ku $||v||$, teda môžu nastať nasledujúce prípady:

$$||k|| \to \infty \text{ alebo } ||v-k|| \to \infty.$$

(1) $||k|| \to \infty$: Keďže $v \in K$, je $\int_{\Gamma_c} TvdS \geq \int_{\Gamma_c} gdS$. Potom $k \geq \frac{1}{|\Gamma_c|}\int_{\Gamma_c} gdS \in \mathbb{R}$, a teda nenastane prípad $k \to -\infty$.

V prípade $k \to \infty$ koercivitu $J(v)$ zaručí podmienka $\int_\Omega f d\Omega < 0$, čo plynie z odhadu $J(v) \geq c^2||v-k||_{1,2}^2 - ||f||_{L^2(\Omega)}||v-k||_{1,2} - k\int_\Omega f d\Omega$, prihliadnuc na absolútny člen pravej strany odhadu.

(2) $||v-k|| \to \infty$: V tomto prípade koercivitu zaručuje kvadratický člen pravej strany odhadu.

Jednoznačnosť

Z vety 6.5 máme:

$$(1)\ a(u_1, v-u_1) \geq f(v-u_1),$$
$$(2)\ a(u_2, v-u_2) \geq f(v-u_2).$$

Obdobne, ako v dôkaze vety 6.5, položme v (1) $v = u_2$ a v (2) $v = u_1$, potom dostávame:

$$(1)\ a(u_1, u_2-u_1) \geq f(u_2-u_1),$$
$$(2)\ a(u_2, u_1-u_2) \geq f(u_1-u_2).$$

Použitím bilinearity formy $a(\cdot,\cdot)$, sčítaním (1), (2) a faktu, že $a(u_2-u_1, u_2-u_1)$ je $H-$eliptická, dostávame:

$$0 \leq a(u_2-u_1, u_2-u_1) \leq 0.$$

Pre semikoercívnu úlohu platí, že riešenie $u(x,y)$ sa musí niekde na hranici Γ_c dotknúť funkcie g. V opačnom prípade by úloha splňovala Neumannovu okrajovú úlohu, ktorej riešenie nikdy nie je jednoznačné a jednotlivé riešenia môžu byť posunuté o konštantu. Nutná a postačujúca podmienka existencie v tomto prípade je $\int_\Omega f d\Omega = 0$.

Nech bez ujmy na obecnosti $u_2 - u_1 = k > 0$, potom $u_2 = u_1 + k$ a $u_2 > u_1$. Keďže u_1 je riešením semikoercívnej úlohy platí, že $u_1 \geq g$. Keďže $u_2 > u_1 \geq g$, tak u_2 sa na hranici Γ_c nikde nedotkne funkcie g, a teda splňuje Neumannovu okrajovú úlohu a platí $\int_\Omega f d\Omega = 0$, čo je spor s predpokladom $\int_\Omega f d\Omega < 0$. Takže $k = 0$ a $u_1 = u_2$.

6.5.1 Numerické experimenty semikoercívneho prípadu

Skúmajme dva typy priehybu membrány s tým, že pokladáme $\Gamma_u = \emptyset$.

Príklad. 6.10

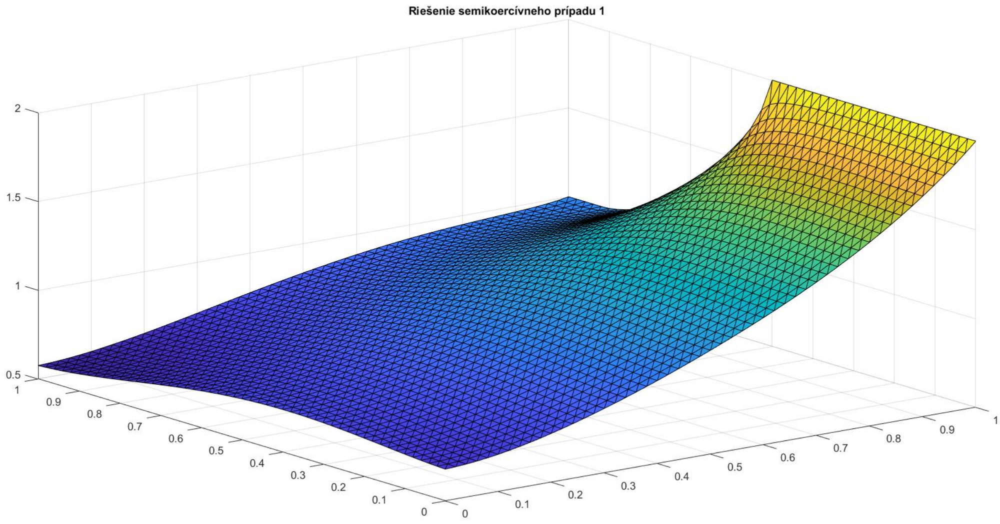
$$\begin{cases} -\triangle u = f \quad v \quad \Omega, \\ \frac{du}{dn} = 0 \quad na \quad \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn} \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c \\ \frac{du}{dn}(u-g) = 0 \quad na \quad \Gamma_c, \end{cases}$$

$$\Gamma_c := \{(1, y) : y \in (0, 1)\},$$

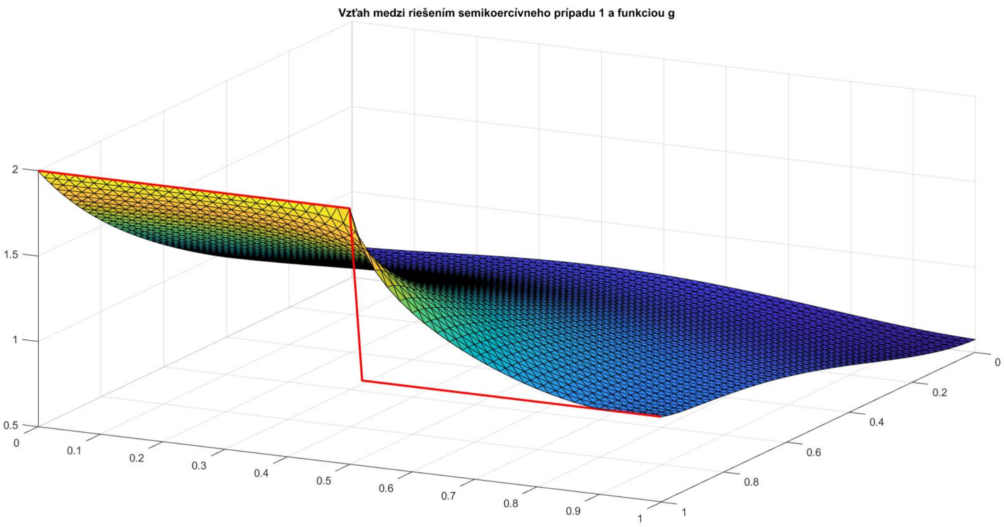
$$\Gamma_f := \Gamma \setminus (\Gamma_c).$$

$$f(x, y) := 1 - (4x - 2)^2 - (4y - 2)^2,$$

$$g(1, y) := \begin{cases} 1, & y \geq \frac{1}{2}, \\ 2, & y \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Obr. 9: Riešenie semikoercívneho prípadu č.1



Obr. 10: Vzťah medzi riešením semikoercívneho prípadu č.1 a funkciou g.

Príklad. 6.11

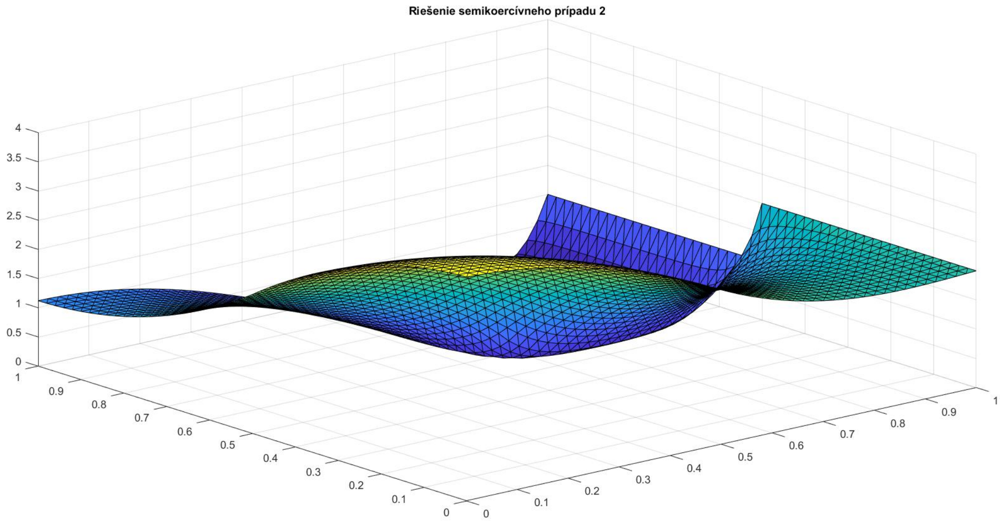
$$\begin{cases} -\triangle u = f \quad v \quad \Omega, \\ \frac{du}{dn} = 0 \quad na \quad \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c, \\ \frac{du}{dn} \geq 0 \quad na \quad \Gamma_c \\ \frac{du}{dn}(u-g) = 0 \quad na \quad \Gamma_c, \end{cases}$$

$$\Gamma_c := \{(1, y) : y \in (0, 1)\},$$

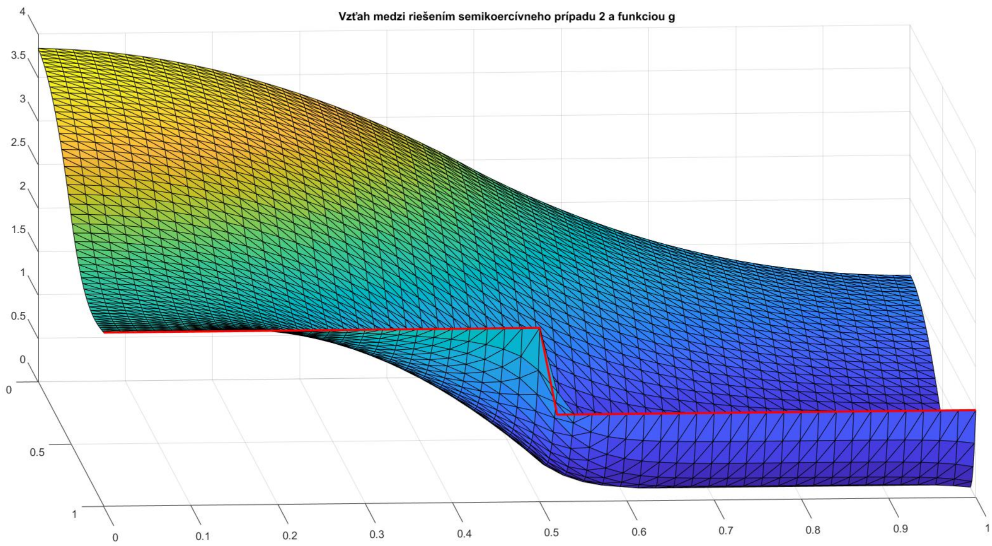
$$\Gamma_f := \Gamma \setminus (\Gamma_c).$$

$$f(x, y) := \begin{cases} -200, & x, y \geq \frac{1}{2}, \\ 20, & x, y \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$g(1, y) := \begin{cases} 1, & y \geq \frac{1}{2}, \\ 2, & y \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Obr. 11: Riešenie semikoercívneho prípadu č.2



Obr. 12: Vzťah medzi riešením semikoercívneho prípadu č.2 a funkciou g.

Všimnime si, že v oboch prípadoch je splnená podmienka $\int_\Omega f dS < 0$, pri experimentovaní som zámerne skúsil navoliť funkciu f tak, aby $\int_\Omega f dS > 0$ a výpočet sa "zacyklil".

6.6 Kontaktná úloha v prípade dvoch membrán

Poznamenajme, že v tejto kapitole použijeme horné indexovanie.

Nech $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$,

$\Omega^1 = (0,1) \times (0,1)$ a $\Omega^2 = (1,2) \times (0,1)$.

Pre $i = 1, 2$ definujme:

$$\Gamma_c^i = \Gamma_c := \{(1, y) : y \in (0,1)\}.$$

Nech $f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \in C(\mathbb{R})$. Naším cieľom bude nájsť dostatočne hladké riešenie (u_1, u_2), spĺňajúce:

$$- \triangle u^i = f^i \text{ na } \Omega,\ u^i = 0 \text{ na } \Gamma_u^i,\ \frac{\partial u^i}{\partial n^i} = 0 \text{ na } \Gamma_f^i,$$

kde n^i je vektor vonkajšej normály.

Na hranici Γ_c uvažujme podmienky v tvare:

$$u^2 - u^1 \geq 0,\ \frac{\partial u^2}{\partial n^2} \geq 0,\ \frac{\partial u^2}{\partial n^2}(u^2 - u^1) = 0,\ \frac{\partial u^1}{\partial n^1} + \frac{\partial u^2}{\partial n^2} = 0.$$

Posledným dvom podmienkam hovoríme **podmienky prechodu**.

Budeme uvažovať dva prípady, a to buď budú obe membrány pevne uchytené na Γ_u^1 a Γ_u^2, kde :

$$\Gamma_u^1 = \{(0, y) : y \in (0,1)\},\ \Gamma_u^2 = \{(2, y) : y \in (0,1)\},$$

takému typu úlohy hovoríme **koercívna**.

Alebo druhá varianta je, že Γ_u^1 je uchytená a paralelná hranica Γ_u^2 je voľná, t.j. položme $\Gamma_u^2 = \emptyset$,

takému typu úlohy hovoríme **semikoercívna**.

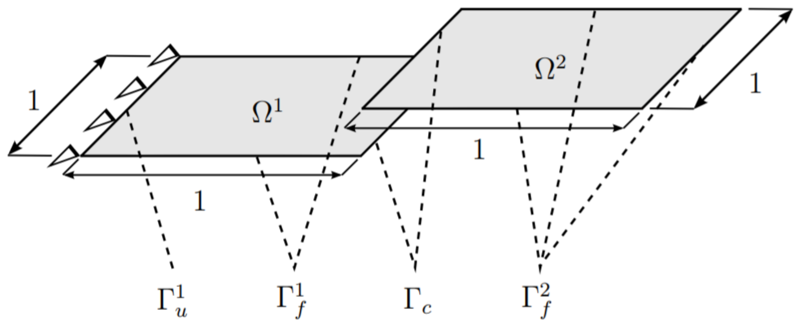
Riešenie môže byť interpretované ako priehyb dvoch membrán, ktoré sú v prípade koercívnej úlohy pevne uchytené na hranici Γ_u^1 a Γ_u^2. Membrány sú vertikálne tlačené silou f a horizontálne naťahované jednotkovou silou pozdĺž Γ_f a na časti Γ_c, kde $u^1 \leq u^2$.

Dá sa ukázať, že v prípade koercívnej úlohy máme zaručenú existenciu a jednoznačnosť riešenia, pretože príslušná bilineárna forma je spojitá, eliptická a symetrická, čo nám zaručuje ekvivalenciu minimalizácie energetického funkcionálu.

V prípade semikoercívnej úlohy nemáme všeobecne zaručenú jednoznačnosť riešenia. Dá sa ukázať, obdobne ako v prípade semikoercívnej úlohy jednej membrány, čo overíme, že v prípade voľnej hranice Γ_u^2, nám existenciu a jednoznačnosť riešenia zaručí očakávaná požiadavka na funkciu f, a to:

$$\int_{\Omega^2} f d\Omega < 0.$$

6.6.1 Slabá formulácia kontaktnej úlohy v prípade dvoch membrán



Obr. 13: Semikoercívny prípad priehybu dvoch membrán.

Ak zredukujeme požiadavky na hladkosť vstupných dát a riešenia $u = (u_1, u_2)$ v prípade koercívneho, resp. semikoercívneho modelu, je nutné uviesť slabú formuláciu problému.

Nech $H^1(\Omega^i)$ je Sobolevov priestor, $H^1(\Omega^i) \subset\subset$ [17] $L^2(\Omega^i)$.

Položme:

$$V^i := \{v^i \in H^1(\Omega^i), \; : v^i = 0 \text{ na } \Gamma_u^i\}.$$

$$V^i \text{ je uzavretý podpriestor } H^1(\Omega^i).$$

Definujme:

$$V := V^1 \times V^2 \text{ a množinu } \mathscr{K} := \{(v^1, v^2) \in V : v^2 - v^1 \geq 0\}.$$

$$H := H^1(\Omega) \times H^2(\Omega),$$

potom je

$$V \subset\subset H.$$

Uvažujme skalárny súčin v tvare:

[17] podpriestor

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega^i} u^i v^i d\Omega,$$

symetrickú bilineárnu formu:

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega^i} \Big(\frac{\partial u^i}{\partial x_1}\frac{\partial v^i}{\partial x_1} + \frac{\partial u^i}{\partial x_2}\frac{\partial v^i}{\partial x_2} \Big) d\Omega = (\nabla u, \nabla v).$$

a lineárny funkcionál $l \in H^*$:

$$l(v) = (f,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega^i} f^i v^i d\Omega,$$

kde symbolom f^i rozumieme reštrikciu funkcie f na príslušnú oblasť, t.j. $f^i := f|_{\Omega^i}$.
Nech $v = (v^1, v^2) \in Q := C^1(\Omega^1) \times C^1(\Omega^2) \cap \mathscr{K}$.
Užitím Greenovej vety a z podmienky $\frac{\partial u^1}{\partial n^1} = -\frac{\partial u^2}{\partial n^2}$ dostávame:

$$\forall v \in Q: \; -(\triangle u, v) = (\nabla u, \nabla v) - \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u^1}{\partial n^1} v^1 d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u^2}{\partial n^2} v^2 d\Gamma =$$

$$(\nabla u, \nabla v) + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u^2}{\partial n^2}(v^1 - v^2) d\Gamma \leq (\nabla u, \nabla v).$$

Teda:

$$\forall v \in Q: \; -(\triangle u, v) = a(u,v) + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u^2}{\partial n^2}(v^1 - v^2) \leq a(u,v).$$

Pre $x \in \Omega^i$ položme $u(x) := u^i(x)$, potom:

$$\forall v \in C^1(\Omega^1) \times C^1(\Omega^2): \; -(\triangle u, v) = (f, v),$$

a z podmienky $\frac{\partial u^2}{\partial n^2}(u^1 - u^2) = 0$ je aj $\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u^2}{\partial n^2}(u^1 - u^2) = 0$.
Nech $v - u \in C^1(\Omega^1) \times C^1(\Omega^2)$, potom dostávame:

$$a(u, v-u) - l(v-u) = -(\triangle u, v-u) +$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u^2}{\partial n^2}(v^2 - v^1) d\Gamma - (f, v-u) = \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u^2}{\partial n^2}(v^2 - v^1) \leq 0.$$

Teda celkovo dostávame:

$$\forall v \in Q: \; a(u, v-u) \geq l(v-u),$$

čo je, podľa vety 6.4, ekvivalentné minimalizácii energetického funkcionálu:

$$q(v) = a(v,v) - 2l(v)$$

.

6.6.2 Existencia a jednoznačnosť riešenia v semikoercívnom prípade priehybu dvoch membrán

Budeme postupovať podobne ako v prípade jednej membrány.

Funkcionál $J(v)$ má tvar:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^1} |\nabla v^1|^2 d\Omega - \int_{\Omega^1} f v^1 d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega^2} |\nabla v^2|^2 d\Omega - \int_{\Omega^2} f v^2 d\Omega$$

Po dosadení $v^2 = v^2 - k + k$, kde $k = \frac{1}{meas(\Gamma_c)}\int_{\Gamma_c} v^2 dS$ zaručuje $\int_{\Gamma_c}(v^2 - k)dS = 0$ dostávame:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^1} |\nabla v^1|^2 d\Omega - \int_{\Omega^1} f v^1 d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega^2} |\nabla (v^2 - k)|^2 d\Omega - \int_{\Omega^2} f(v^2 - k) d\Omega - k\int_{\Omega^2} f d\Omega$$

.

Spojitosť a konvexita funkcionálu plynie analogicky ako v prípade jednej membrány a množina $\mathscr{K}$ je konvexná a uzavretá. Ukážeme, že funkcionál je aj koercívny. Z definície skalárneho súčinu v tejto sekcii plynie, že $||v|| = ||v^1|| + ||v^2||$. Zvlášť rozoberieme dva prípady, keď $||v^1|| \to \infty$ a $||v^2|| \to \infty$.

Pred tým ešte odhadnime funkcionál $J(v)$ analogicky ako v prípade jednej membrány, kde využívame rovnaké argumenty:

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega^1} |\nabla v^1|^2 d\Omega - \int_{\Omega^1} f v^1 d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega^2} |\nabla (v^2 - k)|^2 d\Omega - \int_{\Omega^2} f(v^2 - k) d\Omega - k\int_{\Omega^2} f d\Omega \\ &\geq \underbrace{s^1||v^1||^2_{1,2} - ||f||_{L^2}||v^1||_{1,2}}_{(*)} + \underbrace{s^2||v^2 - k||^2_{1,2} - ||f||_{L^2}||v_2 - k||_{1,2} - k\int_{\Omega^2} f d\Omega}_{(**)}. \end{aligned}$$

(a) Nech $||v^1|| \to \infty$.

Pretože $v^2 \geq v^1$ na Γ_c, platí:

$$k = \frac{1}{meas(\Gamma_c)}\int_{\Gamma_c} v^2 dS \overset{(***)}{\geq} \frac{1}{meas(\Gamma_c)}\int_{\Gamma_c} v^1 dS$$

.

Z predpokladu $||v^1|| \to \infty$, parabolicity v $||v^1||_{1,2}$ členu (*) a ohraničenosti zdola členu (**) vďaka (***) a predpokladu $\int_{\Omega^2} f d\Omega < 0$ plynie $J(v) \to \infty$.

(b) Nech $||v^2|| \to \infty$, potom (*) je vďaka parabolicite ohraničená zdola a člen (**)$\to \infty$ analogicky ako v prípade jednej membrány s využitím (***), pre $\int_{\Omega^2} f d\Omega < 0$.

V týchto podkapitolách bolo čerpané z [8], [12], [15].

7 Lokálne konvexné priestory

7.1 Základné pojmy z topológie

Definícia. 7.1 *Nech T je množina a τ je systém podmnožín T. Povieme, že τ je* ***topológia*** *na T, ak:*

- $\emptyset \in \tau,\ T \in \tau$,
- *ak $S_1, S_2 \in \tau$, potom $S_1 \cap S_2 \in \tau$,*
- *ak $S_\alpha \in \tau$, potom $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \in \tau$,*

kde I je indexová množina.

Teda $\emptyset, T \in \tau$ a τ je uzavretá na tvorbu konečných prienikov a ľubovoľných zjednotení. Usporiadanú dvojicu (T, τ) nazývame **topologický priestor** s topológiou τ.

Definícia. 7.2 *Množinám z τ hovoríme* ***otvorené****. Množinu nazveme* ***uzavretou****, ak je doplnkom k nejakej otvorenej.*

Definícia. 7.3 ***Uzáverom*** *množiny $K \subset T$ nazveme množinu:*

$$\overline{K} := \bigcap \{A : \ A \subseteq T,\ K \subseteq A,\ A \text{ je uzavretá}\}$$

Definícia. 7.4 ***Vnútrajškom*** *množiny $K \subset T$ nazveme množinu:*

$$IntK := \bigcup \{A : \ A \subseteq K,\ A \text{ je otvorená}\}$$

Poznámka. 7.5 *Ak je τ topológia na T a $S \subseteq T$, potom je systém :*

$$\tau_s := \{G \cap S : \ G \in \tau\} \ \text{ topológia na } S.$$

Pozorovanie. 7.6 *Priestor S spolu s topológiou τ_s, ktorý označujeme (S, τ_s), je* ***topologickým podpriestorom*** *priestoru (T, τ).*

Definícia. 7.7 *Zobrazenie f medzi topologickými priestormi (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) nazveme* ***spojitým****, ak vzory všetkých otvorených množín z τ_2 sú otvorené v τ_1.*

Dôsledok. 7.8 *Zobrazenie f medzi topologickými priestormi (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) je spojitým, ak vzory všetkých uzavretých množín z τ_2 sú uzavreté v τ_1.*

Definícia. 7.9 *Ak je τ topológia na X, $z \in X$, potom systém:*

$$\tau(z) := \{A \subset X : z \text{ je vnútorným bodom } A\},$$

*nazveme **systémom okolí** bodu z.*

Definícia. 7.10 *Nech (T, τ) je topologický priestor. Povieme, že postupnosť bodov $(x_n) \subset T$ konverguje v topológii τ k bodu $x \in T$, skrátene $x_n \to x$, ak:*

$$(\forall U \in \tau(x))(\exists n_0) \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U.$$

Tvrdenie. 7.11 *Ak je množina $K \subset T$ uzavretá, potom:*

$$\forall (x_n) \subset K : \ x_n \to x \Rightarrow x \in K.$$

Ak ide o **kompaktnosť**, môžeme definovať kompaktné množiny ako tie, u ktorých z každého ich pokrytia otvorenými množinami možno vybrať **konečné** podpokrytie.
Pod pojmom **sekvenciálne kompaktná** množina rozumieme množinu, kde z každej jej postupnosti je možné vybrať konvergentnú podpostupnosť, majúcu limitu v danej množine.

V metrických priestoroch pojmy kompaktných a sekvenciálne kompaktných množín splývajú, v topologických priestoroch to tak všeobecne neplatí.

Topologický priestor je príliš všeobecný pojem, preto je rozumné uvažovať iba tie topologické priestory, ktoré nám dávajú "rozumné"vlastnosti.

Definícia. 7.12 *Topologický priestor (X, τ) nazveme **Hausdorffov**, alebo tiež **oddeliteľný**, ak pre ľubovoľné dva rôzne body daného priestoru existujú ich okolia také, že majú prázdny prienik.*

Tvrdenie. 7.13 *Nech $T_1 = (X_1, \tau_1)$ a $T_2 = (X_2, \tau_2)$ sú topologické priestory. Nech $f : T_1 \to T_2$ je zobrazenie. Nech $S_1, S_2 \subseteq X_1$, potom:*

$$f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2).$$

Tvrdenie. 7.14 *Nech $T_1 = (X_1, \tau_1)$ a $T_2 = (X_2, \tau_2)$ sú topologické priestory. Nech $f : T_1 \to T_2$ je zobrazenie. Nech $S_1, S_2 \subseteq X_1$, potom platí:*

$$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow f(S_1) \subseteq f(S_2).$$

Tvrdenie. 7.15 *Nech $T_1 = (X_1, \tau_1)$ a $T_2 = (X_2, \tau_2)$ sú topologické priestory. Nech $f : T_1 \to T_2$ je zobrazenie. Nech $Q_1, Q_2 \subseteq X_2$, potom platí:*

$$Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow f^{-1}(Q_1) \subseteq f^{-1}(Q_2).$$

Veta. 7.16 *Nech $T_1 = (X_1, \tau_1)$ a $T_2 = (X_2, \tau_2)$ sú topologické priestory. Ak je zobrazenie $f : T_1 \to T_2$ spojité na X_1, tak:*

$$\forall H \subseteq X_1 : f(\overline{H}) \subseteq \overline{f(H)}.$$

Dôkaz

Zvoľme ľubovoľne $H \subseteq X_1$ a definujme systémy množín nasledovne:

$$\mathbb{K}_1 := \{K \subseteq X_1 : H \subseteq K, K \text{ je uzavretá.}\}$$

$$\mathbb{K}_2 := \{K \subseteq X_2 : f(H) \subseteq K, K \text{ je uzavretá.}\}$$

Z definície uzáveru množiny máme:

$$\overline{H} = \bigcap \mathbb{K}_1 \text{ a } \overline{f(H)} = \bigcap \mathbb{K}_2.$$

Potom:

$$f(\overline{H}) = f(\bigcap \mathbb{K}_1) \overset{(1)}{\subseteq} \bigcap_{K \in \mathbb{K}_1} f(K),$$

kde v (1) sme využili 7.13. Z 7.14 platí:

$$H \subseteq K \Rightarrow f(H) \subseteq f(K).$$

Z definície uzáveru obdobne plynie:

$$\overline{f(H)} := \bigcap \mathbb{K}_2.$$

Z definície spojitosti f platí:

$$\forall K \in \mathbb{K}_2 : f^{-1}(K) \text{ je uzavretá v } T_1.$$

Z 7.15 plynie:

$$f(H) \subseteq K \Rightarrow H \subseteq f^{-1}(K).$$

Definujme ďalej systém:

$$\mathbb{K}_3 := \{f^{-1}(K) : \ K \text{ je uzavretá v } T_2,\ H \subseteq f^{-1}(K)\}.$$

Potom zrejme:

$$\mathbb{K}_3 \subseteq \mathbb{K}_1 \text{ a teda } f(\bigcap \mathbb{K}_1) \subseteq f(\bigcap \mathbb{K}_3),$$

pretože $\bigcap \mathbb{K}_{\mathbb{1}} \subseteq \bigcap \mathbb{K}$.

Z 7.13 máme $f(\bigcap \mathbb{K}_3) \subseteq \bigcap_{K\in\mathbb{K}_3} f(K)$. Ale $\bigcap_{K\in\mathbb{K}_3} f(K) = \bigcap \mathbb{K}_2$, a teda $f(\bigcap \mathbb{K}_1) \subseteq \bigcap \mathbb{K}_2$. Tým je tvrdenie dokázané.

■

Definícia. 7.17 ***Bázou topologického priestoru*** (T, τ) *rozumieme každú sústavu množín* $\mathscr{B} \subset \tau$ *s vlastnosťou, že každá množina z* τ *je zjednotením nejakých množín z* $\mathscr{B}$.

Príklad. 7.18

(a) *Nech* X *je množina a* $\tau = \{\emptyset, X\}$. *Potom* (X, τ) *tvorí topologický priestor, ktorý nazývame* ***triviálny*** *alebo tiež* ***indiskrétny***.

(b) *Nech* X *je množina. Nech* $P(X)$ *je jej potenčná množina*[18]. *Nech* $\tau = P(X)$. *Potom* (X, τ) *tvorí topologický priestor, ktorý nazývame* ***diskrétny***.

(c) *Nech* (X, ρ) *je metrický priestor. Za* τ *voľme systém všetkých otvorených podmnožín tohoto metrického priestoru. Potom* (X, τ) *je topologický priestor. Napr. reálny* $n-$*rozmerný priestor s euklidovskou metrikou je topologický priestor, ktorý je Hausdorffov.*

(d) *Nech* $\mathbb{R}$ *je reálny vektorový priestor. Potom systém všetkých otvorených intervalov* $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *tvorí bázu tzv.* ***intervalovej*** *topológie.*

(e) *Na reálnej priamke je možné definovať aj tzv* ***Sorgenfreyovu*** *topológiu, ktorá je generovaná systémom polouzavretých intervalov, t.j. jej báza* $\mathscr{B} := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b : a, b \in \mathbb{R}\}$. *Dá sa ukázať, že sa naozaj jedná o topológiu.*

7.2 Topologický vektorový priestor

Definícia. 7.19 ***Filtrom*** $\mathscr{F}$ *na množine* A *rozumieme systém neprázdnych podmnožín množiny* A, *spĺňajúci podmienky:*

- *ak* $F \in \mathscr{F}$ *a* $G \supset F$, *potom aj* $G \in \mathscr{F}$,
- *ak* $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, *potom* $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$.

Poznámka. 7.20 *Systém okolí bodu z* $\tau(z)$ *tvorí filter množín obsahujúcich bod* z.

Definícia. 7.21 *Nech* $\mathscr{F}$ *je filter na* A. *Povieme, že systém* $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ *je* ***bázou filtra*** $\mathscr{F}$ *ak:*

$$\mathscr{F} = \{F \subset A : \text{ existuje } B \in \mathscr{B} : B \subset F\}.$$

[18] t.j. množina všetkých podmnožín množiny X.

Definícia. 7.22 ***Topologickým vektorovým priestorom*** *rozumieme vektorový priestor* V *nad* $\mathbb{R}$ *s topológiou* τ*, pre ktorú sú vektorové operácie* $t_1 : V \times V \to V$ *a* $t_2 : \mathbb{R} \times V \to V$*:*

$$t_1 : [x, y] \to x + y \quad a \quad t_2 : [\lambda, x] \to \lambda x,$$

spojité*.*

Príklad. 7.23

(a) Každý NLP X *tvorí topologický vektorový priestor. Norma indukuje metriku a metrika indukuje topológiu.*

Bázou topológie indukovanej metrikou ρ *(indukovanou normou* $||\cdot||$*), budeme rozumieť množinu všetkých otvorených gulí so stredmi v bodoch* $x \in X$*.*

Otvorenou guľou so stredom v bode $x \in X$ *rozumieme* $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$

7.3 Lokálne konvexné priestory

Definícia. 7.24 *Pod pojmom* ***Lokálne konvexný priestor*** *rozumieme taký topologický vektorový priestor* (X, τ)*, ktorého filter okolí nuly* $\tau(0)$ *má bázu tvorenú konvexnými množinami. Topológiu* τ*, pri ktorej je* (X, τ) *lokálne konvexný topologický vektorový priestor, nazveme* ***lokálne konvexnou topológiou.***

Príklad. 7.25

(1) Každý NLP X*, s topológiou odvodenou od normy, je lokálne konvexný. Otvorené gule sú zrejme konvexné pre každé* $\varepsilon > 0$ *a tvoria bázu filtra okolí nuly.*

Zovšeobecnime pojem konvexného funkcionálu:

Definícia. 7.26 *Nech* V *je vektorový priestor nad* $\mathbb{R}$*. Funkcionál* p *nazveme* ***konvexným funkcionálom****, ak:*

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *pre všetky* $x \in V$ *a* $\lambda \geq 0$,

(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *pre všetky* $x, y \in V$.

Pseudonormou *rozumieme každý konvexný funkcionál, spĺňajúci silnejšiu podmienku:*

(aa) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *pre všetky* $x \in X$ *a* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definícia. 7.27 *Nech* V *je vektorový priestor, množina* $A \subset V$ *sa nazýva* ***vyvážená****, ak* $\lambda A \subset A$ *pre všetky* $|\lambda| \leq 1$.

Definícia. 7.28 *Nech množina* A *je konvexná a vyvážená.* ***Minkowského funkcionálom*** *množiny* A *nazveme funkcionál:*

$$p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}.$$

Všimnime si, že Minkowského funkcionál má skoro všetky vlastnosti normy, avšak ak $P_A(x) = 0$, nemusí platiť $x = 0$.

Ak množina A je uzavretá jednotkova guľa Banachovho priestoru, je $p_A(x) = ||x||$ pre všetky $x \in X$, a teda $A = \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$.

Definícia. 7.29 *Nech $\mathscr{P}$ je systém pseudonoriem na topologickom vektorovom priestore (X, τ). Nech $G \subset X$. Povieme, že $G \in \tau$, ak ku každému $z \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ tak, že:*

$$z + (\{x \in X : p_1(x) < \varepsilon\} \cap \cdots \cap \{x \in X : p_n(x) < \varepsilon\}) \subset G.$$

*Takto získanú topologógiu nazývame **topológia generovaná systémom pseudonoriem**.*

Veta. 7.30 *Každá lokálne konvexná topológia je generovaná nejakým systémom pseudonoriem.*

Dôkaz je možné nájsť v [1].

Veta. 7.31 ***Malá Mazurova veta***

Nech M je uzavretá konvexná podmnožina reálneho lokálne konvexného priestoru (X, τ). Ak $0 \in M$ a $x_0 \notin M$, existuje $f \in X^*$ tak, že $f(x_0) > 1$ a $f \leq 1$ na M.

Ak je navyše M absolútne konvexná, možno voliť f tak, aby $|f| \leq 1$ na M.

Dôkaz Dôkaz sa opiera o tzv. axiómu výberu. viď [1]. ∎

7.4 Slabé topológie

Vieme, že ohraničené a uzavreté podmnožiny Banachových priestorov, nemusia byť nutne kompaktné. Cieľom je teda "odstrániť" prebytočné otvorené množiny tak, aby ohraničené a uzavreté podmnožiny Banachových priestorov už boli kompaktné.

V prípade Banachovho priestoru X, zobrazenie ε bolo izometricky izomorfné, $\varepsilon(X) \subset X^{**}$. V prípade lokálne konvexného priestoru X, na topologickom duále X^* nemáme zatiaľ žiadnu topológiu, a teda nie je možné hovoriť o druhom topologickom duále k X. Označme $X^{*\#}$ algebraický duál k X^* a definujme kanonické vnorenie X do $X^{*\#}$ predpisom:

$$\varepsilon : x \to \varepsilon_x : \ \varepsilon_x(\varphi) := \varphi(x) \text{ pre } \varphi \in X^*.$$

Definícia. 7.32 *Nech X je lokálne konvexný priestor. Uvažujme na X lokálne konvexnú topológiu zadanú systémom pseudonoriem $\{p_\varphi\}_{\varphi \in X^*}$, kde:*

$$p_\varphi : x \to |\varphi(x)|, \ x \in X.$$

*Túto topológiu nazveme **slabou topológiou** a budeme ju označovať $\sigma(X, X^*)$.*

Dá sa ukázať, že $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$. Dôkaz tohoto tvrdenia vynechávame, je možné ho nájsť v [1].

Veta. 7.33 *Nech X je vektorový priestor a M podpriestor jeho algebraického duálu $X^\#$. Potom $(X, \sigma(X, M))^* = M$. Teda topológia $\sigma(X, M)$ je najmenšou topológiou na X, pre ktorú sú všetky funkcie z M spojité.*

Dôkaz viď[1]. ■

Uveďme teraz ďalšiu dôležitú vetu, ktorá má mnoho aplikácií v rôznych oblastiach modernej analýzy. Táto veta nám vlastne zaručuje existenciu riešenia variačnej nerovnice, avšak tu ju uvádzam v abstraktnej podobe.

Veta. 7.34 *Nech X je vektorový priestor a M je podpriestor $X^\#$. Ak je τ lokálne konvexná topológia na X, pre ktorú $(X, \tau)^* = M$ a $C \subset X$ je konvexná množina, potom $\overline{C}^\tau = \overline{C}^{\sigma(X,M)}$.*

Dôkaz

Podľa vety 7.33 je topológia $\sigma(X, M)$ najmenšou topológiou na X, pre ktorú sú všetky funkcionály z M spojité. Máme teda $\sigma(X, M) \subset \tau$, potom zrejme $\overline{C}^\tau \subset \overline{C}^{\sigma(X,M)}$. Tým sme ukázali jednu inklúziu.

Bez ujmy na všeobecnosti posunu predpokladajme, že $0 \in C$, teda $\overline{C}^\tau$ je $\tau-$uzavretá[19] konvexná množina obsahujúca nulu. Nech $x_0 \notin \overline{C}^\tau$, potom podľa **malej Mazurovej** vety existuje taký funkcionál $f \in M, f(x_0) > 1$ a $f \leq 1$ na $\overline{C}^\tau$. Pretože f je taktiež $\sigma(X, M)-$spojitý, je $f(\overline{C}^{\sigma(X,M)}) \overset{(1)}{\subset} \overline{f(C)} \subset (-\infty, 1\rangle$, a pretože $f(x_0) > 1$, je $x_0 \in X \setminus \overline{C}^{\sigma(X,M)}$. Tým sme dokázali opačnú inklúziu, a teda aj tvrdenie vety.
Kde v (1) sme použili vetu 7.16.

■

Na dôkaz vety, ktorá nám zaručuje existenciu riešenia variačnej nerovnice, je možné nahliadnuť aj takto:

Veta. 7.35 *Nech K je konvexná podmnožina NLP, potom K je uzavretá práve vtedy, keď je slabo uzavretá.*

Dôkaz

NLP je vektorový priestor, označme ho X. V dôkaze vety 7.34 stačí zvoliť $M = X^* \subset\subset X^\#$. Nech τ je lokálne konvexná topológia na X, t.j. platí $(X, \tau)^* = X^*$, a nech $K \subset X$ je konvexná množina, potom z dôkazu predchádzajúcej vety plynie, že $\overline{C}^\tau = \overline{C}^{\sigma(X,X^*)}$. Týmto je tvrdenie vety dokázané.

■

[19] uzavretá v topológii τ

V závere uveďme príklad topologického vektorového priestoru, ktorý nie je lokálne konvexný. Všetky informácie, týkajúce sa teórie miery a integrálu, je možné nájsť v [4]. Pred tým poznamenajme, že **pseudometrickým priestorom** rozumieme usporiadanú dvojicu (X, ρ), kde $X \neq \emptyset$ je množina a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$:

(a) $\rho(x, y) \geq 0$ a $x = y \Rightarrow \rho(x, y) = 0$,

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, y) + \rho(z, y)$.

Uvažujme priestor s mierou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $p \in (0, 1)$. Označme $\mathcal{L}^p(X)$ množinu všetkých μ-merateľných funkcií f na X, pre ktoré je $\int_X |f|^p d\mu$ konečný a položme:

$$\rho(f, g) := \int_X |f - g|^p d\mu \text{ pre } f, g \in \mathcal{L}^p.$$

Potom usporiadaná dvojica $(\mathcal{L}, \rho(\cdot, \cdot))$ tvorí pseudometrický priestor, ktorý nie je lokálne konvexný.

Po stotožnení funkcií, rovnajúcich sa μ-skoro všade, dostaneme metrický priestor.

Príklad. 7.36 *Zvoľme $p = \frac{1}{2}$ a $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}((0, 1))$, čo je priestor všetkých merateľných funkcií rovnajúcich sa μ-skoro všade takých, že $\int_0^1 |f(x)|^{\frac{1}{2}} dx$ je konečný. Funkcia:*

$$\rho(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|^{\frac{1}{2}} dx$$

je metrikou na $\mathcal{L}((0, 1))$. Ukážme, že topológia indukovaná touto metrikou nie je lokálne konvexná. Uvažujme otvorenú guľu so stredom v nule a polomerom R:

$$B(0, R) := \{f \in \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}((0, 1)) : \int_0^1 |f(x)|^{\frac{1}{2}} < R\}.$$

Ukážeme, že pre nejaké $\varepsilon > 0$, guľa $B(0, \varepsilon)$ obsahuje funkcie, ktorých priemer[20] *leží mimo $B(0, R)$. Zvoľme $\varepsilon > 0$ a $n \geq 1$. Zvoľme systém n disjunktných intervalov v $(0, 1)$, ktoré nemusia nutne pokryť celý interval $(0, 1)$. Označme ich $A_1, \ldots, A_n$. Položme $f_k := (\frac{\varepsilon}{\mu(A_k)})^2 \chi_{A_k}$, kde μ je Lebesgueova miera, takže $\mu(A_k)$ je dĺžka intervalu A_k. Potom:*

$$\rho(f_k, 0) = \int_0^1 |f_k(x)|^{\frac{1}{2}} dx = \varepsilon \int_0^1 \Big(\frac{\chi_{A_k}}{\mu(A_k)}\Big) dx = \varepsilon,$$

teda každá funkcia f_k je vo vzdialenosti ε od nuly. Kedže nosiče funkcií f_k sú disjunktné, pre ich priemer $g_n = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{k} f_k$ platí:

$$\int_0^1 |g_n(x)|^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \Big|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big|^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \Big|f_k(x)\Big|^{\frac{1}{2}} dx = \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} \varepsilon = n^{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

[20] t.j. $\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{k} f_k$

Vhodnou voľbou n, ktoré závisí na ε, môžeme vidieť, že $\rho(g_n, 0)$ môže byť väčšia ako požadujeme. Napr. zvoľme $R = 1, n = 10000, \varepsilon = 0,1$, potom $\rho(g_n, 0) = 10$.

V tejto kapitole bolo čerpané z [1], [3], [13], [14], [17].

8 Záver

Cieľom diplomovej práce bolo naštudovať a spracovať problematiku variačných nerovníc, naštudovať teóriu lokálne konvexných priestorov a slabých topológií, vybudovať dôkaz kľúčovej vety, ktorá nám zaručuje existenciu riešenia variačnej nerovnice vo forme ekvivalencie. Mojim vlastným prínosom v tejto práci bolo budovanie dôkazov v kapitole venovanej optimalizáciám funkcionálov na normovaných lineárnych priestoroch, implementácia algoritmu MPRGP a numerické experimenty pre koercívny i semikoercívny prípad priehybu mebrány. Keďže som sa venoval aj multifunkciám, pri písaní tejto práce som si všimol, že je možné prepojiť teóriu variačných nerovníc s teóriou multifunkcií.

Literatúra

[1] Jaroslav Lukeš. *Zápisky z fukcionální analýzy.* Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2012.

[2] Lukáš Rachůnek, Irena Rachůnková. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2004.

[3] Jiří Bouchala. *Úvod do funkcionální analýzy.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

[4] Jiří Bouchala. *Variační metody.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

[5] Jiří Bouchala. *MATEMATIKA III, pro bakalářské studium.* Katedra aplikované matematiky, FEI VŠB–TU Ostrava,2000.

[6] Eduard Čech, Vojtěch Jarník. *Bodové množiny. S dodatkem „O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné".* Praha: Jednota Československých matematiků a fysiků, 1936.

[7] Milan Kučera. *Variační nerovnice. Úvod do teorie a užití na okrajové úlohy pro PDR.* Fakulta aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni, 1996.

[8] Marie Sadowská. *Diplomová práce, Rešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic.* VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra aplikované matematiky, 2005.

[9] Marta Domorádová and Zdeněk Dostál. *Projector preconditioning for partially bound constrained quadratic optimization.* VŠB-Technical University Ostrava, 2007.

[10] Stanislav Sysala. *Řešitelnost 1D modelových úloh: variační rovnice a nerovnice. Diplomová práce.* Ostravská univerzita v Ostravě, Ostrava, 2003.

[11] J. Schöberl. *Solving the Signorini Problem on the Basis of Domain Decomposition Techniques.* Linz.

[12] Jiří Bouchala. *Variační metody - kurs pro doktorandy, rukopis.* VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra aplikované matematiky, 2015.

[13] Aleš Pultr. *Matematické struktury.* Katedra aplikované matematiky a ITI, MFF University Karlovy, 2005

[14] Gerald Beer. *Topologies on Closed and Closed Convex Sets.* Department of Mathematics and Computer Science, California State University Los Angeles. U.S.A

[15] Ing. Marie Sadowská. *Scalable Total BETI for 2D and 3D Contact Problems.* VŠB–Technical University of Ostrava Faculty of Electrical Engineering and Computer Science Department of Applied Mathematics, 2008.

[16] Radim Blaheta. *Matematické modelování a metoda konečných prvků.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

[17] Keith Conrad L^p *spaces for* $0 < p < 1$. Online z "`https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/lpspace.pdf`",